

6 Криволинейные координаты

Упражнение 6.1. Эллиптические координаты λ, μ, z в $\mathbb{R}^3$ определяются с помощью формул

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

где $c > 0$ — масштабный множитель.

- (1) Приведите одну из максимальных областей определения эллиптических координат.
- (2) Найдите и изобразите координатные кривые и координатные поверхности эллиптических координат.
- (3) Вычислите якобианы перехода между эллиптическими и евклидовыми координатами.
- (4) Запишите евклидову метрику в эллиптических координатах.

Упражнение 6.2. Эллипсоидальные координаты в $\mathbb{R}^3$ вводятся с помощью уравнений ($a > b > c$):

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (\lambda > -c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1 \quad (-b^2 > \nu > -a^2).$$

Докажите, что каждой точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует не более одной системы значений λ, μ, ν . Выясните, каким точкам $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует одна система значений λ, μ, ν .

Параметры λ, μ, ν называются *эллипсоидальными координатами*.

Выразите декартовы координаты x, y, z через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν .

Упражнение 6.3. Касательным вектором ξ к области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке $P \in \Omega$ называется вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ гладкой кривой $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = P$. Координатами касательного вектора ξ в криволинейной системе координат называются координаты вектора $\dot{\gamma}(0)$ кривой γ , записанной в этой криволинейной системе координат.

Покажите, что координаты w касательного вектора ξ в точке $P \in \Omega$, вычисленные в криволинейной системе координат y^i , получаются из его координат v , вычисленных в евклидовой системе координат x^i , умножением на матрицу Якоби:

$$w = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P) \right) v, \quad w^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P) v^j.$$

Упражнение 6.4. Градиентом $\nabla f(P)$ гладкой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в точке P области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется касательный вектор, который в евклидовых координатах x^i имеет вид

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(P) \right).$$

Докажите, что координаты градиента $\nabla f(P)$ в криволинейной системе координат y^i могут быть вычислены по формуле

$$[\nabla f]^i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j},$$

где (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}) евклидовой метрики, записанной в координатах y^i .

Упражнение 6.5. Гладким векторным полем ξ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется семейство касательных векторов, заданное в евклидовых координатах гладким отображением $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Дивергенцией $\operatorname{div} \xi$ поля ξ называется функция на Ω , которая в евклидовых координатах равна $\sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$. Лапласианом Δf гладкой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется функция, которая в евклидовых координатах равна $\sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$. Пусть y^i — криволинейные координаты в Ω , $(w^1, \dots, w^n)$ — координаты поля ξ , вычисленные по отношению к y^i , (g_{ij}) — матрица евклидовой метрики, записанной в y^i , (g^{ij}) — матрица, обратная к (g_{ij}) , и $g = \det(g_{ij})$. Докажите, что

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{g} w^i), \quad \Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j} \right).$$