

3 Поверхности. Первая фундаментальная форма

Упражнение 3.1. Составьте параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной регулярной кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется **развертывающейся**. Исследуйте развертывающуюся поверхность на регулярность.

Упражнение 3.2. Вычислите первую квадратичную (фундаментальную) форму следующих поверхностей:

- (1) эллипсоида, заданного параметрически в виде

$$r(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v);$$

- (2) поверхности, заданной графиком функции $z = f(x, y)$;

- (3) поверхности, заданной как решение уравнения $F(x, y, z) = 0$, где в точках этого решения выполняется $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z) \neq 0$.

Упражнение 3.3. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

- (1) Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

- (2) Найдите углы этого криволинейного треугольника.

- (3) Вычислите площадь треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

Упражнение 3.4. Найдите на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающую каждую кривую $v = \text{const}$ под постоянным углом θ (**локсодромии**).