

10 Многообразия: атласы, гомеоморфность

Упражнение 10.1. Постройте конечный атлас на единичной окружности

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

превращающий S^1 в гладкое многообразие. Выпишите функции перехода и проверьте их гладкость.

Упражнение 10.2. Постройте конечный атлас на двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1$, превращающий T^2 в гладкое многообразие. Выпишите функции перехода и проверьте их гладкость.

Упражнение 10.3. Приведите пример топологического, но не гладкого многообразия.

Упражнение 10.4. Пусть $X = \mathbb{R} \sqcup \{0'\}$, а τ — семейство множеств $U \subset X$ таких, что

- $U \setminus \{0, 0'\}$ — открытое подмножество прямой $\mathbb{R}$ в стандартной топологии;
- если $U \cap \{0, 0'\} \neq \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subset U$.

Докажите, что

- (1) семейство τ — топология на X ;
- (2) топология τ — не хаусдорфова;
- (3) на топологическом пространстве X существует гладкий атлас, состоящий из двух карт; тем самым, пространство X с этим атласом удовлетворяет всем условиям из определения гладкого многообразия, за исключением хаусдорфовости.

Пространство X называется *прямой с двукратным нулем* или *прямой Александера*.

Упражнение 10.5. Покажите, что на объединении двух координатных осей нельзя ввести атлас, превращающий это топологическое пространство (с индуцированной топологией) в топологическое многообразие.

Упражнение 10.6. Докажите, что на $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SL}(n)$ можно ввести атласы, превращающие эти топологические пространства в гладкие многообразия.

Упражнение 10.7. Докажите, что группа $\mathrm{SO}(2)$ гомеоморфна окружности. Чему гомеоморфна группа $\mathrm{O}(2)$?

Упражнение 10.8. Прямая называется *ориентированной*, если на ней выбрано одно из двух направлений (таким образом, каждая прямая порождает две ориентированные прямые). Какому многообразию гомеоморфно множество всех ориентированных прямых на плоскости? Всех прямых на плоскости?