

Классическое и непрерывное расстояния Громова–Хаусдорфа

С. А. Богатый, А. О. Иванов, Е. А. Резниченко, А. А. Тужилин

29 мая 2026 г.
22:15:10

Оглавление

Введение	2
1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа	3
1.1 Расстояние Хаусдорфа	4
1.2 Расстояние Громова–Хаусдорфа	6
1.3 Соответствия	6
1.4 Непрерывные расстояния Громова–Хаусдорфа	10
1.5 Общие свойства расстояний Громова–Хаусдорфа	12
2 Элементы теории многозначных отображений	15
2.1 Теоретико-множественные свойства многозначных отображений	15
2.2 Топологические свойства многозначных отображений	17
3 Полнота, внутреннее расстояние и геодезические	22
3.1 Внутренние метрики и геодезические	22
3.2 Когда GH -расстояние строго внутреннее?	24
3.3 Полнота класса $(\mathcal{GH}, d_{GH})$	25
3.4 Неполнота классов $\mathcal{M}^c$ и $\mathcal{GH}^c$	26
4 Основы теории категорий	28
4.1 Определение категории.	28
4.2 Примеры категорий.	29
4.3 Простейшие понятия.	32
4.4 Определение функтора.	33
4.5 Постановка общих задач.	33
4.6 Степенные и экспоненциальные функторы.	34
4.7 Топология на пространстве отображений.	39
4.8 Гомотопическая категория.	41
4.9 Шейповая категория.	42
4.10 * Топологическое описание пространств $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	43
4.11 * Элементы бесконечномерной топологии.	45
4.12 * Абсолютные (окрестностные) экстензоры [ретракты].	46
4.13 Z -множества и строгие Z -множества.	49
4.14 Степенной функтор.	50
4.15 Континуумы Пеано.	50
4.16 Функторы гиперпространств $\exp X$ и $\exp^c X$	51
4.17 Экспонента наследственно неразложимого континуума.	56
5 Добавление: аналог топологии на собственных классах	58
Литература	60

Введение

Знаменитое расстояние Громова–Хаусдорфа [1, 2] измеряет степень неизометричности метрических пространств: у изометричных пространств расстояние равно нулю, и чем более “непохожи” пространства друг на друга, тем это расстояние больше. В классическом определении расстояния Громова–Хаусдорфа никак не учитываются дополнительные структуры, которыми могут быть наделены метрические пространства. Даже топология, порождаемая метрикой, игнорируется этим расстоянием. В работе [3] был предложен вариант модификации расстояния Громова–Хаусдорфа, учитывающий непрерывность. При этом было замечено, что если сравнивать сферы в евклидовом пространстве, наделенные стандартной внутренней метрикой, с помощью классического расстояния Громова–Хаусдорфа, то результат будет отличаться от сравнения с непрерывным аналогом этого расстояния. В работе [4] был предложен другой вариант непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа для сравнения динамических систем и решений уравнений в частных производных. Однако подход этих авторов приводит к существенному усложнению техники, так как их вариант расстояния не удовлетворяет неравенству треугольника.

Мы рассмотрим несколько модификаций классического расстояния Громова–Хаусдорфа, которые тем или иным способом учитывают непрерывность. В лекциях мы будем параллельно доказывать базовые результаты, касающиеся классического расстояния, а также обсуждать, что из этих результатов переносится на непрерывное расстояние, а что нет.

Для понимания данного курса требуется начальное представление об общей топологии [5], см. также [6, 7]. Все остальное мы будем подробно разъяснять, давая столько деталей, сколько требуется слушателям для комфортного восприятия. Считаем, что наши лекции будут доступны даже студентам первого курса, а интересны эти лекции могут быть как старшекурсникам, так и аспирантам.

Тема 1

Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Мы начнем с обсуждения общих результатов, связанных с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Более подробно с этой теорией можно познакомиться в классической монографии [17], см. также [18]. В этой теории расстояние далеко не всегда является метрикой, так как может быть бесконечным, а также равным нулю между разными точками. Мы будем придерживаться следующей терминологии. **Расстоянием** на множестве X мы будем называть каждое отображение $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ такое, что

- $\rho(x, x) = 0$ для всех $x \in X$, и
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (*симметричность*).

В приводимых ниже определениях ρ — расстояние. Если дополнительно выполняется

- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ (*неравенство треугольника*),

то ρ называется **обобщенной псевдометрикой** (иногда вместо термина “псевдометрика” используют “полуметрика”).

Если еще

- $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ (*положительная определенность*),

то ρ называется **обобщенной метрикой**.

Наконец, если

- $\rho(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in X$,

то слово “обобщенный” опускают. Иногда, кроме того, добавляют слово “конечная”, например, конечная метрика или конечная псевдометрика.

Множество X , вместе с введенной функцией ρ , называют таким **пространством**, как называется сама функция ρ . Например, если функция ρ имеет самый общий вид, то X — **пространство с расстоянием**, если ρ — метрика, то X — **метрическое пространство**, а если ρ — обобщенная псевдометрика, то X — **обобщенное псевдометрическое пространство**.

Кроме того, мы будем иметь дело со всеми метрическими пространствами, которых столько же, сколько и всех множеств. Действительно, на каждом множестве можно ввести функцию расстояния, равную 1 между каждой парой различных точек. Тем самым, если мы хотим рассматривать всю совокупность метрических пространств, то сталкиваемся с известными парадоксами теории множеств. Чтобы избежать эти противоречия, мы обычно пользуемся вариантом теории множеств, названным в честь фон Неймана, Бернаиса и Гёделя [12, 13, 14]. Здесь множества заменяются на объекты, называемые **классами**, причем классы бывают двух типов. Если класс является элементом некоторого другого класса, то он называется **множеством**, а если нет — то **собственным классом**. Так снимается парадокс “множества всех множеств”, так как теперь совокупность всех множеств относится к другому типу объектов, т.е. является собственным классом. С классами можно почти всегда работать как с обычными множествами, в частности, для них определено декартово произведение, отображение, так что на классе можно, например, определить и обобщенную псевдометрику (расстояние

Громова–Хаусдорфа именно ей и является). Но на собственных классах нельзя определить топологию. Действительно, по определению топологии на множестве X само множество является элементом топологии, так что на собственные классы такое определение не переносится. Как можно обойти эту проблему можно почитать в дополнении к этой лекции, а также в [27, 26]. Впрочем, в настоящих лекциях нам это не понадобится.

1.1 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $|xy|$. Пусть теперь $x \in X$, а $r > 0$ и $s \geq 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ и $B_s(x) = \{y \in X : |xy| \leq s\}$ обозначим соответственно **открытый** и **замкнутый шары** с центром в точке x и радиусами r и s . Если A и B — непустые подмножества X , то положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$ и $|AB| = |BA| = \inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$. Далее, определим **открытую r -окрестность** и **замкнутую s -окрестность множества A** , положив соответственно

$$U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\} \quad \text{и} \quad B_s(A) = \{x \in X : |xA| \leq s\}.$$

Определение 1.1. Для непустых подмножеств A и B метрического пространства X **расстоянием Хаусдорфа от A до B** называется величина

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\left\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\right\} = \\ &= \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } U_r(A) \supset B\} = \inf\{s \geq 0 : A \subset B_s(B) \text{ и } B_s(A) \supset B\}. \end{aligned}$$

Задача 1.2. Докажите эквивалентность приведенных выше разных определений расстояния Хаусдорфа.

Предложение 1.3. Расстояние Хаусдорфа d_H является обобщенной псевдометрикой на множестве всех непустых подмножеств метрического пространства X .

Доказательство. По определению, функция d_H неотрицательна и симметрична. Если $A \subset X$ — непустое подмножество, то для любого $r > 0$ имеем $A \subset U_r(A)$, поэтому $d_H(A, A) = 0$. Таким образом, остается проверить неравенство треугольника.

Выберем произвольные непустые $A, B, C \subset X$ и положим $c = d_H(A, B)$, $a = d_H(B, C)$, $b = d_H(A, C)$. Мы должны показать, что $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$, т.е. $b \leq c + a$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $r = c + \varepsilon$ и $s = a + \varepsilon$, тогда $A \subset U_r(B)$ и $B \subset U_s(C)$.

Лемма 1.4. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $r, s > 0$, и $A \subset X$ — непустое. Тогда $U_r(U_s(A)) \subset U_{r+s}(A)$.

Доказательство. Для произвольного $x \in U_r(U_s(A))$ существует $y \in U_s(A)$ такой, что $|xy| < r$, и существует $a \in A$, для которого $|ya| < s$. Но тогда, по неравенству треугольника, $|xa| \leq |xy| + |ya| < r + s$, откуда $x \in U_{r+s}(A)$, что и требовалось. $\square$

Из леммы 1.4 заключаем

$$A \subset U_r(B) \subset U_r(U_s(C)) \subset U_{r+s}(C).$$

Аналогично, $U_{r+s}(A) \supset C$. Таким образом, $b \leq r + s = c + a + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. $\square$

Замечание 1.5. Расстояние Хаусдорфа может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$. Тем не менее, при некоторых ограничениях расстояние Хаусдорфа превращается в (обобщенную) метрику.

Для метрического пространства X обозначим $\mathcal{C}(X)$ множество всех непустых замкнутых подмножеств X .

Предложение 1.6. Пусть X — метрическое пространство, тогда расстояние Хаусдорфа d_H , ограниченное на множество $\mathcal{C}(X)$, является обобщенной метрикой.

Доказательство. В силу предложения 1.3, остается проверить положительную определенность. Пусть $A, B \in \mathcal{C}(X)$ различны, тогда одно из них содержит точку, не лежащую в другом. Без ограничения общности предположим, что существует $x \in A \setminus B$. Так как множество B замкнуто, то для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$, откуда $|xB| \geq \varepsilon$. Следовательно, $U_{\varepsilon/2}(B) \not\supset A$, так что $d_H(A, B) \geq \varepsilon/2$. $\square$

Обозначим $\mathcal{H}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X .

Предложение 1.7. Пусть X — метрическое пространство, тогда расстояние Хаусдорфа d_H , ограниченное на множество $\mathcal{H}(X)$, является метрикой.

Доказательство. В силу предложения 1.6, остается проверить ограниченность. Так как $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ограничены, то существует $r > 0$ такое, что $A \subset U_r(b)$ для некоторого $b \in B$, и $B \subset U_r(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда $A \subset U_r(B)$ и $B \subset U_r(A)$, откуда $d_H(A, B) \leq r$, т.е. d_H — ограничено. $\square$

Следствие 1.8. Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства X . Тогда $d_H(A, B) = 0$, если и только если замыкания $\bar{A}$ и $\bar{B}$ этих подмножеств совпадают.

Доказательство. Для любого $r > 0$ выполняется $U_r(A) \supset \bar{A}$ и $A \subset \bar{A} \subset U_r(\bar{A})$, поэтому $d_H(A, \bar{A}) = 0$. Если $d_H(A, B) = 0$, то из неравенства треугольника мгновенно извлекаем $d_H(\bar{A}, \bar{B}) = 0$, но $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{C}(X)$, а на $\mathcal{C}(X)$ расстояние Хаусдорфа d_H положительно определено (предложение 1.6), поэтому $\bar{A} = \bar{B}$. Обратно, если $\bar{A} = \bar{B}$, то из неравенства треугольника получаем $d_H(A, B) = 0$. $\square$

В дальнейшем, говоря про $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{H}(X)$, мы всегда будем предполагать, что на них задано расстояние Хаусдорфа d_H .

Предложение 1.9. Для метрического пространства X рассмотрим отображение $\nu: X \rightarrow \mathcal{C}(X)$, заданное так: $\nu: x \mapsto \{x\}$. Тогда ν изометрично.

Доказательство. Из определения расстояния Хаусдорфа мгновенно заключаем, что $d_H(\{x\}, \{y\}) = |xy|$, что и завершает доказательство. $\square$

Теорема 1.10 ([17]). Пусть X — метрическое пространство, тогда X и $\mathcal{H}(X)$ одновременно обладают или нет следующими свойствами:

- (1) полнотой,
- (2) полной ограниченностью,
- (3) компактностью,
- (4) ограниченной компактностью.

Доказательство. (1) Пусть сначала X — полное метрическое пространство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $A_1, A_2, \dots$ элементов из $\mathcal{H}(X)$ и покажем, что она сходится в $\mathcal{H}(X)$. Пусть A состоит из пределов всевозможных сходящихся последовательностей $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$, где $i_1 < i_2 < \dots$ и $a_{i_k} \in A_{i_k}$ для всех k . Покажем, что $A_i \xrightarrow{d_H} A$ и, значит, $A_i \xrightarrow{d_H} \bar{A} \in \mathcal{H}(X)$ (ограниченность $\bar{A}$ вытекает из ограниченности A_i , так как при больших i выполняется $A \subset U_\varepsilon(A_i)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и, значит, A также ограничено).

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $p, q \geq n$ выполняется $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/2$. Выберем любой $i_1 \geq n$, тогда существует $i_2 > i_1$ такой, что для всех $p, q \geq i_2$ имеем $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/4$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $i_1 < i_2 < \dots$ такую, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и любых $p, q \geq i_k$ выполняется $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/2^k$. Выберем произвольный $a_{i_1} \in A_{i_1}$. Тогда существует $a_{i_2} \in A_{i_2}$ такой, что $|a_{i_1} a_{i_2}| < \varepsilon/2$. Далее, существует $a_{i_3} \in A_{i_3}$, для которого $|a_{i_2} a_{i_3}| < \varepsilon/4$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$ такую, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $|a_{i_k} a_{i_{k+1}}| < \varepsilon/2^k$.

Покажем теперь, что $A_p \subset U_\varepsilon(A)$ для всех $p \geq n$. Из неравенства треугольника вытекает, что построенная последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства X , она сходится к некоторому a . По определению, $a \in A$. Из неравенства треугольника вытекает, что $|a_{i_1} a| < \varepsilon$, откуда, так как a_{i_1} был выбран произвольным образом, имеем $A_{i_1} \subset U_\varepsilon(A)$. Так как i_1 был выбран любым при условии $i_1 \geq n$, получаем, что для каждого $p \geq n$ выполняется $A_p \subset U_\varepsilon(A)$.

Покажем теперь, что $A \subset U_\varepsilon(A_p)$ для всех $p \geq n$. Пусть $a \in A$ — предел последовательности $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots$, где $j_1 < j_2 < \dots$ и $a_{j_k} \in A_{j_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, начиная с некоторого k , имеем $j_k \geq n$. Выберем теперь в последовательности $j_1 < j_2 < \dots$ такую подпоследовательность $i_2 := j_k, i_3 := j_l, \dots$, что после добавления i_1 последовательность $i_1 < i_2 < \dots$ удовлетворяет свойствам, описанным выше. Тогда a также является пределом последовательности a_{i_k} , и так как $|a a_{i_1}| < \varepsilon$, имеем $A \subset U_\varepsilon(A_{i_1})$. Так как i_1 выбирали произвольно при условии $i_1 \geq n$, имеем $A \subset U_\varepsilon(A_p)$ для всех $p \geq n$. Последнее завершает доказательство того, что $A_i \xrightarrow{d_H} A$.

Обратно, пусть пространство $\mathcal{H}(X)$ полное. Покажем, что X — также полное. Рассмотрим вложение ν из предложения 1.9. Так как ν изометрично, оно сохраняет фундаментальность последовательностей, их сходимость и инъективно, поэтому сходимость ν -образов фундаментальных последовательностей к точкам из $\nu(X)$ означает в точности полноту X . Пусть $x_1, x_2, \dots$ — фундаментальная последовательность в X , тогда, как мы уже отметили, $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{H}(X)$, которая, в силу полноты $\mathcal{H}(X)$, сходится к некоторому $Y \in \mathcal{H}(X)$. Мы должны показать, что $Y \subset X$ — одноточечное множество. Пусть это не так, и, значит, Y содержит по крайней мере две разные точки x и y . Положим $\varepsilon = |xy| > 0$. В силу сходимости, существует i такое, что $d_H(\{x_i\}, Y) < \varepsilon/2$, но тогда $U_{\varepsilon/2}(\{x_i\}) \supset Y$, так что диаметр Y меньше ε , противоречие, завершающее доказательство.

(2) Пусть X вполне ограничено. Покажем, что $\mathcal{H}(X)$ — тоже. Для произвольного $\varepsilon' > 0$ выберем любое $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ и произвольную конечную ε -сеть $Y \subset X$. Покажем, что $\mathcal{H}(Y)$ — (конечная) ε' -сеть в $\mathcal{H}(X)$. Выберем произвольное $A \in \mathcal{H}(X)$ и определим $B = \{y \in Y : |yA| < \varepsilon\}$. Так как Y — это ε -сеть, для каждого $a \in A$ существует $y \in Y$, для которого $|ya| < \varepsilon$, откуда $|yA| < \varepsilon$, так что $y \in B$. В частности, $B \neq \emptyset$, поэтому $B \in \mathcal{H}(Y)$ и, кроме того, $A \subset U_\varepsilon(B)$. Выберем теперь произвольное $y \in B$, тогда $|yA| < \varepsilon$, так что существует $a \in A$, для которого $|ya| < \varepsilon$. Последнее означает, что $B \subset U_\varepsilon(A)$ и, следовательно, $d_H(A, B) \leq \varepsilon$, откуда $\mathcal{H}(Y)$ — конечная ε' -сеть.

Обратно, пусть пространство $\mathcal{H}(X)$ вполне ограниченное. Но тогда каждое его подмножество, включая $\nu(X)$, где отображение ν построено в предложении 1.9, также вполне ограничено. Действительно, если $Z \subset \mathcal{H}(X)$ — конечная $(\varepsilon/2)$ -сеть, то выберем в каждом непустом $U_{\varepsilon/2}(z) \cap \nu(X)$, $z \in Z$ по одной произвольной точке $\{y\}$. Множество выбранных так $\{y\}$ обозначим Y . Это множество непусто, так как все $\nu(X)$ лежит в $(\varepsilon/2)$ -окрестности множества Z . Проверим, что Y является ε -сетью в $\nu(X)$. Действительно, для каждого $\{x\} \in \nu(X)$ существует $z \in Z$ такой, что $d_H(\{x\}, z) < \varepsilon/2$. С другой стороны, $U_{\varepsilon/2}(z) \cap \nu(X) \neq \emptyset$, так как содержит $\{x\}$, поэтому в этом пересечении выбрана точка $\{y\} \in Y$. По неравенству треугольника имеем $d_H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$, что и требовалось.

(3) Напомним, что для метрического пространства компактность равносильна одновременной полноте и полной ограниченности, так что утверждение этого пункта вытекает из двух предыдущих.

(4) Напомним, что ограниченная компактность означает компактность всех замкнутых шаров. Проверку этого пункта мы оставим слушателям. $\square$

1.2 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Если X и Y — изометричные метрические пространства, то этот факт будем обозначать $X \approx Y$.

Определение 1.11. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа* между непустыми метрическими пространствами X и Y называется величина

$$d_{GH}(X, Y) = \inf \{d_H(X', Y') : X', Y' \subset Z, X' \approx X, Y' \approx Y\},$$

где точная нижняя грань берется по всем метрическим пространствам Z и всем изометричным вложениям пространств X и Y в Z .

Пример 1.12. Пусть X и Y изометричны. В качестве Z из определения 1.11 возьмем X . Тогда $X' = X$ и в качестве Y' также можно взять X , поэтому $0 \leq d_{GH}(X, Y) \leq d_H(X', Y') = d_H(X, X) = 0$ в силу предложения 1.3, так что $d_{GH}(X, Y) = 0$. Отметим, что из $d_{GH}(X, Y) = 0$ не вытекает изометричность X и Y . Действительно, положим $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1)$, $Z = \mathbb{R}$, $X' = X$, $Y' = Y$, тогда $0 \leq d_{GH}(X, Y) \leq d_H(X', Y') = 0$ в силу замечания 1.5.

Определение 1.11 плохо приспособлено для конкретных вычислений. Имеется эквивалентное определение, которое дается в терминах соответствий. Приведем необходимые понятия и результаты.

1.3 Соответствия

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Частным случаем отношения является график функции $f: X \rightarrow Y$, который мы, как правило, будем обозначать тем же символом f . Если σ — отношение между X и Y , то определено обратное отношение $\sigma^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \sigma\}$ между Y и X . В этом смысле для функции $f: X \rightarrow Y$, даже не являющейся биекцией,

мы будем писать f^{-1} , понимая при этом обратное отношение. Для произвольного множества Z обозначим $\mathcal{P}_0(Z)$ семейство всех непустых подмножеств в Z . В частности, $\mathcal{P}_0(X \times Y)$ — это множество всех непустых отношений между X и Y .

Для любого отношения $\sigma \subset X \times Y$, а также $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ определены

$$\sigma(x_0) = \{y \in Y : (x_0, y) \in \sigma\} — \sigma\text{-образ } x_0, \text{ и } \sigma^{-1}(y_0) = \{x \in X : (x, y_0) \in \sigma\} — \sigma\text{-прообраз } y_0.$$

Кроме того, если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то определены их σ -образ и σ -прообраз соответственно:

$$\sigma(A) = \cup_{a \in A} \sigma(a) \text{ и } \sigma^{-1}(B) = \cup_{b \in B} \sigma^{-1}(b).$$

Если X, Y, Z — множества, а $\sigma \subset X \times Y$ и $\tau \subset Y \times Z$ — отношения, то определена **композиция** этих отношений:

$$\tau \circ \sigma = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y, (x, y) \in \sigma, (y, z) \in \tau\}.$$

Определение 1.13. Для любых непустых метрических пространств X, Y и непустого отношения $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ назовем **искажением** $\text{dis } \sigma$ **отношения** σ величину

$$\text{dis } \sigma = \sup \left\{ ||xx' - yy'|| : (x, y), (x', y') \in \sigma \right\}.$$

Следующий результат мгновенно вытекает из определения искажения.

Предложение 1.14. Если $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ и $\tau \subset \sigma$, то $\text{dis } \tau \leq \text{dis } \sigma$.

Предложение 1.15. Если $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$, $\tau \in \mathcal{P}_0(Y \times Z)$ и $\tau \circ \sigma \neq \emptyset$, то $\text{dis}(\tau \circ \sigma) \leq \text{dis } \sigma + \text{dis } \tau$.

Доказательство. Действительно, пусть $(x, z), (x', z') \in \tau \circ \sigma$, тогда существуют $y, y' \in Y$, для которых $(x, y), (x', y') \in \sigma$ и $(y, z), (y', z') \in \tau$, откуда

$$||xx' - zz'|| = ||xx' - yy' + yy' - zz'|| \leq ||xx' - yy'|| + ||yy' - zz'||.$$

Переходя к супремумам, получим требуемое. □

Напомним, что **многозначным отображением** $f: X \rightrightarrows Y$ **множества** X **во множество** Y называется каждое отображение $f: X \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$. Иными словами, такое отображение сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $f(x) \subset Y$. Отметим, что ряд автором не требует непустоты $f(x)$ для каждого x .

Многозначное отображение f **сюръективно**, если $\cup_{x \in X} f(x) = Y$. Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y , являющееся сюръективным многозначным отображением, называется **соответствием**. Множество всех соответствий между X и Y обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$.

Предложение 1.16. Непустые метрические пространства X и Y **изометричны тогда и только тогда, когда существует** $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, **для которого** $\text{dis } R = 0$. Все такие R — это в точности все изометрии между X и Y (мы отождествляем отображения и их графики).

Доказательство. Если X и Y изометричны, то в качестве R можно взять изометрию. Обратно, если $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ удовлетворяет $\text{dis } R = 0$, то для любых $(x, y), (x', y') \in R$ выполняется $||xx' - yy'|| = 0$, поэтому R — однозначное отображение, сохраняющее расстояния. В силу сюръективности R , оно является изометрией. □

Теорема 1.17 ([17]). Для любых непустых метрических пространств X и Y выполняется

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \}.$$

Доказательство. Пусть $d := d_{GH}(X, Y) < \infty$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует метрическое пространство Z и его подмножества $X' \approx X$ и $Y' \approx Y$ такие, что $d_H(X', Y') < d + \varepsilon$. Положим $R = \{(x, y) \in X' \times Y' : |xy| < d + \varepsilon\}$, где расстояние $|xy|$ вычисляется в Z . Так как $d_H(X', Y') < d + \varepsilon$, то $R \in \mathcal{R}(X', Y')$. Для любых $(x, y), x', y' \in R$ неравенство треугольника дает

$$-|xy| + |yy'| - |y'x'| \leq |xx'| \leq |xy| + |yy'| + |y'x'|,$$

откуда $||xx'| - |yy'|| \leq |xy| + |x'y'| < 2d + 2\varepsilon$, так что $\text{dis } R \leq 2d + 2\varepsilon$. Следовательно, отождествляя X с X' и Y с Y' с помощью изометрий, что позволяет рассматривать R как элемент из $\mathcal{R}(X, Y)$, имеющий то же самое искажение, получаем

$$\frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \} \leq d = d_H(X', Y'),$$

в частности, левая часть этого неравенства конечна.

Обратно, пусть $I := \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \} < \infty$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ такое, что $\text{dis } R - \varepsilon < I \leq \text{dis } R < \infty$. Если $r := \text{dis } R = 0$, то, по предложению 1.16, X и Y изометричны, поэтому $d_{GH}(X, Y) = 0$ в силу примера 1.12. В этом случае $I = 0$ и, значит, теорема доказана.

Пусть теперь $r > 0$. Продолжим метрики пространств X и Y на $Z := X \sqcup Y$, положив для каждый $x \in X$ и $y \in Y$.

$$|xy| = |yx| = \inf \{ |xx'| + r/2 + |y'y'| : (x', y') \in R \}.$$

Таким образом, мы получили на Z симметричную неотрицательную функцию, которая к тому же положительно определенная, так как $r > 0$, и не обращается в бесконечность, так как $r < \infty$.

Лемма 1.18. *Построенная выше функция расстояния на Z является метрикой.*

Доказательство. Достаточно проверить неравенство треугольника на тройку точек, не лежащую ни в X , ни в Y . Так как два возникающие здесь случае симметричны, достаточно рассмотреть ситуацию $x_1, x_2 \in X$ и $y \in Y$. Здесь, тоже в силу симметрии, достаточно проверить приводимые ниже два неравенства.

Докажем сначала, что $|x_1x_2| \leq |x_1y| + |yx_2|$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и для $i = 1, 2$ выберем $(x'_i, y'_i) \in R$ так, чтобы $|x_iy| \geq |x_ix'_i| + r/2 + |y'_iy| - \varepsilon$. Воспользовавшись тем, что $\text{dis } R = r < \infty$, откуда $|x'_1x'_2| \leq |y'_1y'_2| + r + \varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} |x_1x_2| &\leq |x_1x'_1| + |x'_1x'_2| + |x'_2x_2| \leq |x_1x'_1| + (|y'_1y'_2| + r + \varepsilon) + |x'_2x_2| \leq |x_1x'_1| + (|y'_1y| + |yy'_2| + r + \varepsilon) + |x'_2x_2| = \\ &= (|x_1x'_1| + r/2 + |y'_1y|) + (|yy'_2| + r/2 + |x'_2x_2|) + \varepsilon \leq (|x_1y| + \varepsilon) + (|x_2y| + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем первое искомое неравенство.

Докажем теперь, что $|x_1y| \leq |x_1x_2| + |x_2y|$. Имеем

$$|x_1x_2| + |x_2y| \geq |x_1x_2| + (|x_2x'_2| + r/2 + |y'_2y| - \varepsilon) \geq |x_1x'_2| + r/2 + |y'_2y| - \varepsilon \geq |x_1y| - \varepsilon,$$

где последнее неравенство вытекает из $|x_iy| \leq |x_ia| + r/2 + |by|$, которое имеет место для каждого $(a, b) \in R$. Снова в силу произвольности ε получаем второе искомое неравенство. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Заметим, что для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется $|xy| \geq r/2$. С другой стороны, если $(x, y) \in R$, то выбрав в выражении $|xx'| + r/2 + |y'y'|$, $(x', y') \in R$ в качестве (x', y') пару (x, y) , заключим $|xy| \leq r/2$, откуда для каждого таких x и y имеем $|xy| = r/2$. Так как R — соответствие, то для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем $|xY| = r/2$ и $|XY| = r/2$, откуда $d_H(X, Y) = r/2$. В силу того, что $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ можно выбирать со сколь угодно близким к I искажением $\text{dis } R$, получаем $d_{GH}(X, Y) \leq I/2$. Доказательство закончено. $\square$

Предложение 1.19. *Пусть X и Y — непустые метрические пространства, $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ и $\bar{R} \subset X \times Y$ — замыкание R . Тогда $\text{dis } \bar{R} = \text{dis } R$.*

Доказательство. Если $\text{dis } R = \infty$, то и $\text{dis } \bar{R} = \infty$, так как $R \subset \bar{R}$, и в этом случае равенства доказаны.

Пусть теперь $\text{dis } R < \infty$. Выберем произвольные $(x, y), (x', y') \in \bar{R}$, тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $(x_1, y_1), (x'_1, y'_1) \in R$, что $|xx_1| < \varepsilon$, $|yy_1| < \varepsilon$, $|x'_1x'| < \varepsilon$, $|y'_1y'| < \varepsilon$, но тогда $|x_1x'_1| - 2\varepsilon < |xx'| < |x_1x'_1| + 2\varepsilon$ и $|y_1y'_1| - 2\varepsilon < |yy'| < |y_1y'_1| + 2\varepsilon$, поэтому

$$||xx'| - |yy'|| < ||x_1x'_1| - |y_1y'_1|| + 4\varepsilon,$$

откуда

$$\text{dis } \bar{R} = \sup_{(x, y), (x', y') \in \bar{R}} ||xx'| - |yy'|| \leq \sup_{(x_1, y_1), (x'_1, y'_1) \in R} ||x_1x'_1| - |y_1y'_1|| + 4\varepsilon = \text{dis } R + 4\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $\text{dis } \bar{R} \leq \text{dis } R$. Но $R \subset \bar{R}$, поэтому имеем и противоположное неравенство, а с ним и искомое равенство. $\square$

Обозначим $\overline{\mathcal{R}}(X, Y)$ множество всех замкнутых соответствий $R \in \mathcal{R}(X, Y)$. Из предложения 1.19 и теоремы 1.17 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 1.20. *Для любых непустых метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \overline{\mathcal{R}}(X, Y) \}.$$

Предложение 1.21. *Пусть X и Y — непустые метрические пространства, $\varepsilon > 0$, $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ и $R_\varepsilon = U_\varepsilon(R) \subset X \times Y$. Тогда $\text{dis } R = \inf_{\varepsilon > 0} \text{dis } R_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis } R_\varepsilon$.*

Доказательство. Если $\text{dis } R = \infty$, то и $\text{dis } R_\varepsilon = \infty$ для всех ε , так как $R \subset R_\varepsilon$, и в этом случае равенства доказаны. Если же $\text{dis } R < \infty$, то $\text{dis } R_\varepsilon$ — монотонно возрастающая функция от ε , поэтому $\inf_{\varepsilon > 0} \text{dis } R_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis } R_\varepsilon$. Остальная часть дословно повторяет доказательство предложения 1.19. $\square$

Частный случай соответствия можно построить по любой паре отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, положив $R_{f,g} = f \cup g^{-1}$, где g^{-1} обозначает отношение, обратное к отношению g . С другой стороны, в каждом соответствии $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ можно выделить подсоответствие $R_{f,g}$, если в качестве отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ взять такие, что $f \subset R$ и $g \subset R^{-1}$. Легко видеть, что искажение каждого подсоответствия не превосходит искажения соответствия, в частности, $\text{dis } R_{f,g} \leq \text{dis } R$. Чтобы вычислить искажение соответствия $R_{f,g}$, нам понадобится **коискажение** $\text{codis}(f, g)$, определяемое следующим образом:

$$\text{codis}(f, g) = \sup_{x \in X, y \in Y} \left| |xg(y)| - |f(x)y| \right|.$$

Предложение 1.22. *Для любых непустых метрических пространств X, Y , соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, и произвольных двух отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ таких, что $f \subset R$ и $g \subset R^{-1}$, выполняется*

$$\text{dis } R_{f,g} = \max \{ \text{dis } f, \text{dis } g, \text{codis}(f, g) \} \leq \text{dis } R.$$

Доказательство. Действительно, для каждой пары $(x, y), (x', y') \in R_{f,g}$

- или $y = f(x), y' = f(x')$, тогда $||xx'| - |yy'||$ дает вклад в $\text{dis } f$;
- или $x = g(y), x' = g(y')$, тогда $||xx'| - |yy'||$ дает вклад в $\text{dis } g$;
- или выполняется “смешанное” условие: $y = f(x), x' = g(y')$, или $x = g(y), y' = f(x')$, тогда $||xx'| - |yy'||$ дает вклад в $\text{codis}(f, g)$.

При этом, каждая пара $(x, y), (x', y')$, дающая вклад в $\text{dis } f$, $\text{dis } g$ или $\text{codis}(f, g)$, встречается в $R_{f,g}$. Осталось вспомнить, что $\text{dis } R_{f,g}$ равно супремуму величин $||xx'| - |yy'||$. $\square$

Из предложения 1.22 и теоремы 1.17 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 1.23. *Для любых непустых метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f: X \rightarrow Y \\ g: Y \rightarrow X}} \max \{ \text{dis } f, \text{dis } g, \text{codis}(f, g) \}.$$

Из предложения 1.15 вытекает, что искажение композиции отображений не превосходит суммы искажений этих отображений. А что можно сказать про коискажение?

Предложение 1.24. *Пусть даны три непустых метрических пространства X, Y и Z , а также отображения $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \xrightleftharpoons[k]{h} Z$. Тогда $\text{codis}(h \circ f, g \circ k) \leq \text{codis}(f, g) + \text{codis}(h, k)$.*

Доказательство. Выберем произвольные $x \in X, z \in Z$ и положим $y_1 = f(x), y_2 = k(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| |x(g \circ k)(z)| - |(h \circ f)(x)z| \right| &= \left| |xg(y_2)| - |h(y_1)z| \right| = \left| |xg(y_2)| - |y_1y_2| + |y_1y_2| - |h(y_1)z| \right| \leq \\ &\leq \left| |xg(y_2)| - |f(x)y_2| \right| + \left| |y_1k(z)| - |h(y_1)z| \right| \leq \text{codis}(f, g) + \text{codis}(h, k). \end{aligned}$$

Результат вытекает из произвольности x и z . $\square$

1.4 Непрерывные расстояния Громова–Хаусдорфа

Если в следствии 1.23 ограничиться непрерывными отображениями f и g , то получим определение **непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа**:

$$d_{GH}^c(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f \in C(X, Y) \\ g \in C(Y, X)}} \text{dis } R_{f, g} = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f \in C(X, Y) \\ g \in C(Y, X)}} \max\{\text{dis } f, \text{dis } g, \text{codis}(f, g)\},$$

где $C(Z, W)$ обозначает множество всех непрерывных отображений из метрического пространства Z в метрическое пространство W . Это расстояние для краткости будем также называть **непрерывным GH-расстоянием**.

Приведем еще несколько вариантов определения непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа.

Предварительно напомним необходимые определения теории многозначных отображений. Детали см. в [19].

Пусть X и Y — топологические пространства, тогда многозначное отображение $f: X \rightrightarrows Y$ называется

- **полунепрерывным сверху в точке** $x \in X$, если для любой окрестности $U^{f(x)}$ множества $f(x)$ существует такая окрестность U^x точки x , что для всех $x' \in U^x$ выполняется $f(x') \subset U^{f(x)}$, т.е. $f(U^x) \subset U^{f(x)}$ (напомним, что для соответствия $\sigma \subset X \times Y$ и $A \subset X$ мы определили $\sigma(A)$ как $\cup_{a \in A} \sigma(a)$, а не как $\{\sigma(a)\}_{a \in A}$);
- **полунепрерывным снизу в точке** $x \in X$, если для любого открытого множества $U \subset Y$ такого, что $f(x) \cap U \neq \emptyset$, существует окрестность U^x точки x , удовлетворяющая следующему условию: для всех $x' \in U^x$ выполняется $f(x') \cap U \neq \emptyset$;
- **непрерывным в точке** $x \in X$, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу в точке x .

Многозначное отображение **полунепрерывно сверху, снизу, или непрерывно**, если соответствующее условие выполняется для всех точек $x \in X$.

Замечание 1.25. Если в качестве f взять однозначное отображение, каждое из трех только что приведенных определений эквивалентно обычной непрерывности в точках. Таким образом, каждое непрерывное однозначное отображение является полунепрерывным сверху и снизу, а также непрерывным в смысле многозначных отображений. В частности, тождественное отображение, рассматриваемое как многозначное, — непрерывно.

Предложение 1.26. Пусть X , Y и Z — непустые топологические пространства, а $f: X \rightrightarrows Y$ и $g: Y \rightrightarrows Z$ — многозначные отображения, одновременно или полунепрерывные сверху, или полунепрерывные снизу, или непрерывные. Тогда их композиция — такая же.

Доказательство. Пусть сначала f и g полунепрерывны сверху. Берем произвольную точку $x \in X$ и рассматриваем окрестность $U := U^{g(f(x))}$, тогда для каждой точки $y \in f(x)$ имеем $g(y) \subset g(f(x)) \subset U$, так что U является также и окрестностью $g(y)$. Так как g полунепрерывно сверху в y , существует окрестность V^y такая, что $g(V^y) \subset U$. Положим $V = \cup_{y \in f(x)} V^y$, тогда $g(V) \subset U$, и V — окрестность $f(x)$, поэтому, в силу полунепрерывности f , существует окрестность W^x такая, что $f(W^x) \subset V$, откуда $g(f(W^x)) \subset U$, так что $g \circ f$ полунепрерывна сверху в x и, в силу произвольности x , полунепрерывна сверху в целом.

Пусть теперь f и g полунепрерывны снизу. Берем произвольную точку $x \in X$ и рассматриваем открытое множество $U \subset Z$, для которого $g(f(x)) \cap U \neq \emptyset$. Так как $g(f(x)) = \cup_{y \in f(x)} g(y)$, среди $y \in f(x)$ есть такие, для которых $g(y) \cap U \neq \emptyset$. Множество этих y обозначим Y' . Так как g полунепрерывна снизу, для каждого $y \in Y'$ имеется окрестность V^y такая, что для всех $y' \in V^y$ выполняется $g(y') \cap U \neq \emptyset$. Положим $V = \cup_{y \in Y'} V^y$, тогда V — открытое множество, причем для всех $y' \in V$ имеем $g(y') \cap U \neq \emptyset$ и, кроме того, так как $\emptyset \neq Y' \subset f(x)$ и $Y' \subset V$, то $f(x) \cap V \neq \emptyset$. Раз f полунепрерывна снизу, существует окрестность W^x такая, что для всех $x' \in W^x$ выполняется $f(x') \cap V \neq \emptyset$. Но тогда и $g(f(x')) \cap U \neq \emptyset$ для всех $x' \in W^x$, так что W^x удовлетворяет условию полунепрерывности функции $g \circ f$ в точке x , и, в силу произвольности x , эта функция полунепрерывна снизу в целом.

Для непрерывных многозначных отображений доказательство получается конкатенацией двух предыдущих пунктов. $\square$

Предложение 1.27. Пусть X и Y — непустые топологические пространства, $Z \subset Y$ — непустое подмножество, а $f: X \rightrightarrows Y$ — полунепрерывное сверху (снизу, непрерывное) многозначное отображение. Тогда ограничение $f|_Z$ — такое же.

Доказательство. В определении полунепрерывности f в точке $x \in X$ утверждается, что если выполняется некоторое свойство для $f(x)$, то существует такая окрестность U^x , что это же свойство выполняется и для $f(x')$ по всем точкам $x' \in U^x$. Но для $f|_Z$ для полунепрерывности требуется выполнение свойства для всех $x' \in U^x \cap Z$, что, конечно же, также имеет место. $\square$

Для непустых метрических пространств X и Y положим

- $\mathcal{R}_{us}(X, Y) = \{R \in \mathcal{R}(X, Y) : R, R^{-1} \text{ полунепрерывны сверху}\};$
- $\mathcal{R}_{ls}(X, Y) = \{R \in \mathcal{R}(X, Y) : R, R^{-1} \text{ полунепрерывны снизу}\};$
- $\mathcal{R}_{rc}(X, Y) = \{R \in \mathcal{R}(X, Y) : R, R^{-1} \text{ непрерывны}\}.$

Имеют место следующие очевидные включения:

$$(1.1) \quad \mathcal{R}(X, Y) \supset \mathcal{R}_c(X, Y) \cup \mathcal{R}_{us}(X, Y) \cup \mathcal{R}_{ls}(X, Y) \supset \mathcal{R}_{us}(X, Y) \cap \mathcal{R}_{ls}(X, Y) = \mathcal{R}_{rc}(X, Y).$$

Многие факты, приводимые ниже, имеют место одновременно для всех введенных выше семейств соответствий, поэтому, для краткости, если речь идет об одном из этих семейств, мы будем обозначать его $\mathcal{R}_{gen}$, т.е. $\mathcal{R}_{gen} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{R}_c, \mathcal{R}_{us}, \mathcal{R}_{ls}, \mathcal{R}_{rc}\}$. Например, докажем следующий общий результат.

Предложение 1.28. *Каждое семейство $\mathcal{R}_{gen}$ непусто.*

Доказательство. Заметим, что соответствие $R := X \times Y$ является непрерывным, так что $\mathcal{R}_{rc}(X, Y)$, а вместе с ним, в силу включений (1.1), и $\mathcal{R}_{us}(X, Y)$, $\mathcal{R}_{ls}(X, Y)$ и $\mathcal{R}(X, Y)$ всегда непусты. Кроме того, если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ — постоянные функции, то они непрерывны, поэтому $\mathcal{R}_c(X, Y)$ содержит $R_{f,g}$ и, значит, также никогда не пусто. $\square$

Далее, замечание 1.25 и предложение 1.26 влекут

Следствие 1.29. *Для любых непустых метрических пространств X , Y и Z*

- *если $\nu: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм (в частности, изометрия), то*

$$\nu \in \mathcal{R}(X, Y) \cap \mathcal{R}_c(X, Y) \cap \mathcal{R}_{us}(X, Y) \cap \mathcal{R}_{ls}(X, Y) \cap \mathcal{R}_{rc}(X, Y);$$

- *для каждого $\mathcal{R}_{gen}$*

$$\mathcal{R}_{gen}(Y, Z) \circ \mathcal{R}_{gen}(X, Y) \subset \mathcal{R}_{gen}(X, Z).$$

Определим следующие модификации расстояния Громова–Хаусдорфа, а именно,

- $d_{GH}^{us}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{\text{dis } R : R \in \mathcal{R}_{us}(X, Y)\}$ назовем **полунепрерывным сверху GH-расстоянием**;
- $d_{GH}^{ls}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{\text{dis } R : R \in \mathcal{R}_{ls}(X, Y)\}$ назовем **полунепрерывным снизу GH-расстоянием**;
- $d_{GH}^{rc}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{\text{dis } R : R \in \mathcal{R}_{rc}(X, Y)\}$ назовем **R-непрерывным GH-расстоянием**.

Пример 1.30. Если X и Y — дискретные пространства, а $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение, то оно непрерывно, поэтому для любого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ и каждого $R_{f,g} \subset R$ выполняется $R_{f,g} \in \mathcal{R}_c(X, Y)$, откуда $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}^c(X, Y)$.

Если же $f: X \rightrightarrows Y$ — произвольное многозначное отображение, то оно непрерывно. Действительно, для любой точки x в качестве окрестности x можно выбрать $U^x := \{x\}$, и тогда для каждой точки $x' \in U^x$ выполняется $f(x') = f(x) \subset f(x)$ и $f(x') \cap f(x) = f(x) \neq \emptyset$, поэтому для любого открытого множества $V \subset Y$, или содержащего $f(x)$, или пересекающего $f(x)$, это же свойство выполняется и для всех $x' \in U^x$, что и доказывает непрерывность f . Отсюда вытекает, что $\mathcal{R}(X, Y) = \mathcal{R}_{us}(X, Y) = \mathcal{R}_{ls}(X, Y) = \mathcal{R}_{rc}(X, Y)$, поэтому $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}^{ls}(X, Y) = d_{GH}^{rc}(X, Y)$.

Итак, для дискретных X и Y все определенные выше расстояния Громова–Хаусдорфа равны между собой.

Из включений (1.1) мгновенно получаем следующий результат.

Предложение 1.31. *Для любых непустых метрических пространств X и Y*

- $d_{GH}(X, Y) \leq \min \{d_{GH}^c(X, Y), d_{GH}^{us}(X, Y), d_{GH}^{ls}(X, Y), d_{GH}^{rc}(X, Y)\};$

$$\bullet \quad d_{GH}^{rc}(X, Y) \geq \max\{d_{GH}^{us}(X, Y), d_{GH}^{ls}(X, Y)\}.$$

Следующий пример показывает, что расстояния d_{GH} и d_{GH}^c могут быть различными.

Пример 1.32. Пусть $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ и $Y = \{0, 1/2, 1\} \subset \mathbb{R}$. Ясно, что $d_H(X, Y) = 1/4$, поэтому $d_{GH}(X, Y) \leq 1/4$. С другой стороны, так как пространство Y дискретно, а X — связно, то каждое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ постоянно, поэтому $\text{dis } f = 1$. По следствию 1.23, для любого непрерывного $g: Y \rightarrow X$ имеем $\text{dis } R_{f,g} \geq \text{dis } f = 1$, откуда $d_{GH}^c(X, Y) \geq 1/2$ и, значит, $d_{GH}^c(X, Y) > d_{GH}(X, Y)$.

Приведем более интересный пример.

Пример 1.33. Нам понадобится одна из теорем типа Борсука–Улама [20, Теорема 5].

Теорема 1.34. Для каждого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ существует $x \in S^n$ такое, что $f(x) = f(-x)$.

Из этой теоремы мгновенно вытекает следующий результат.

Теорема 1.35 ([3]). Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ имеем $d_{GH}^c(S^m, S^n) = \pi/2$.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $m < n$. Тогда, по определению,

$$d_{GH}^c(S^m, S^n) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f \in C(S^m, S^n) \\ g \in C(S^n, S^m)}} \max\{\text{dis } f, \text{dis } g, \text{codis}(f, g)\}.$$

По теореме 1.34 существует такое $x \in S^n$, что $g(x) = g(-x)$, поэтому $\text{dis } g \geq \pi$, откуда, в силу произвольности f и g , имеем $d_{GH}^c(S^m, S^n) \geq \pi/2$. Чтобы получить обратное неравенство, рассмотрим в качестве f и g отображения в точку, скажем $f(S^m) = y_0$ и $g(S^n) = x_0$, тогда $\text{dis } f = \text{dis } g = \pi$, а

$$\text{codis}(f, g) = \sup_{x \in X, y \in Y} \left| |x x_0| - |y_0 y| \right| \leq \pi,$$

что и требовалось. □

Тем не менее, для расстояния Громова–Хаусдорфа в исходном понимании все обстоит иначе. Следующая теорема сложная, и мы приведем ее без доказательства.

Теорема 1.36 ([3]). Для $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ имеем $d_{GH}(S^m, S^n) < \pi/2$.

1.5 Общие свойства расстояний Громова–Хаусдорфа

Из определений рассмотренных расстояний мгновенно заключаем, что все они неотрицательны, равны нулю между каждым пространством и им самим, а также симметричны. Оказывается, что все эти расстояния также удовлетворяют неравенству треугольника. По аналогии с тем, как мы поступили по отношению к множествам соответствий разного типа, будем обозначать d_{GH}^{gen} любой из введенных выше вариантов расстояния Громова–Хаусдорфа, т.е. $d_{GH}^{gen} \in \{d_{GH}, d_{GH}^c, d_{GH}^{us}, d_{GH}^{ls}, d_{GH}^{rc}\}$.

Теорема 1.37. Все определенные выше расстояния Громова–Хаусдорфа являются обобщенными псевдометриками.

Доказательство. Достаточно проверить неравенство треугольника. Выберем произвольные непустые метрические пространства X, Y, Z и покажем, что $d_{GH}^{gen}(X, Z) \leq d_{GH}^{gen}(X, Y) + d_{GH}^{gen}(Y, Z)$. Если одно из $d_{GH}^{gen}(X, Y)$ и $d_{GH}^{gen}(Y, Z)$ бесконечно, то неравенство имеет место. Пусть теперь обе эти величины конечны. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствия $R_1 \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$ и $R_2 \in \mathcal{R}_{gen}(Y, Z)$ такие, что $2d_{GH}^{gen}(X, Y) \geq \text{dis } R_1 - \varepsilon$ и $2d_{GH}^{gen}(Y, Z) \geq \text{dis } R_2 - \varepsilon$, тогда $R := R_2 \circ R_1 \in \mathcal{R}_{gen}(X, Z)$ в силу следствия 1.29, и, по предложению 1.15,

$$2d_{GH}^{gen}(X, Z) \leq \text{dis } R \leq \text{dis } R_1 + \text{dis } R_2 \leq 2d_{GH}^{gen}(X, Y) + 2d_{GH}^{gen}(Y, Z) + 2\varepsilon,$$

откуда получаем требуемое в силу произвольности ε . □

Далее, следствие 1.29 и предложение 1.16 приводят к

Следствие 1.38. Пусть X и Y — непустые изометричные метрические пространства, тогда $d_{GH}^{gen}(X, Y) = 0$.

В дальнейшем через $\mathcal{GH}$ будем обозначать собственный класс, состоящий из всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Из следствия 1.38 вытекает, что на $\mathcal{GH}$ корректно определены все пять рассматриваемых модификаций расстояния Громова–Хаусдорфа. Собственный класс $\mathcal{GH}$ мы называем **классом Громова–Хаусдорфа**. Подкласс в $\mathcal{GH}$, состоящий из всех ограниченных метрических пространств, обозначим $\mathcal{B}$, а подкласс в $\mathcal{B}$ из всех компактных метрических пространств — через $\mathcal{M}$. Класс $\mathcal{M}$ является множеством и называется **пространством Громова–Хаусдорфа**.

Для метрического пространства X обозначим $\text{diam } X$ его **диаметр**:

$$\text{diam } X = \sup\{|xy| : x, y \in X\}.$$

Для одноточечного метрического пространства зарезервируем обозначение Δ_1 . Если $\lambda > 0$, то λX обозначим метрическое пространство, получающееся из X умножением всех расстояний на λ . Если пространство X ограничено, то положим $0X = \Delta_1$. Заметим, что $\text{diam}(\lambda X) = \lambda \text{diam } X$.

В следующем предложении мы показываем, что основные свойства обычного расстояния Громова–Хаусдорфа (см. [17]) также имеют место и в случае с его непрерывными аналогами.

Предложение 1.39. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется

- (1) $2d_{GH}^{gen}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$;
- (2) $2d_{GH}^{gen}(X, Y) \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$;
- (3) если диаметр X или Y конечен, то $|\text{diam } X - \text{diam } Y| \leq 2d_{GH}^{gen}(X, Y)$;
- (4) если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ имеем $2d_{GH}^{gen}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu| \text{diam } X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := tX$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами;
- (5) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}^{gen}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}^{gen}(X, Y)$, а если пространства X и Y ограничены, то равенство имеет место и для $\lambda = 0$;
- (6) если X и Y — дискретные метрические пространства, то $d_{GH}^{gen}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$;
- (7) если $X_1, X_2, \dots$ — последовательность метрических пространств, сходящихся по отношению к d_{GH}^{gen} к метрическому пространству X , то она также сходится и по отношению к d_{GH} к этому X .

Доказательство. (1) Заметим, что множество $\mathcal{R}(\Delta_1, X)$ состоит ровно из одного соответствия $R := \Delta_1 \times X$, и так как входящие в это множество остальные $\mathcal{R}_{gen}(\Delta_1, X)$ всегда непусты в силу предложения 1.28, то все они совпадают с $\{R\}$. Осталось заметить, что $\text{dis } R = \text{diam } X$.

(2) Так как каждое $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ содержится в соответствии $X \times Y$, то, в силу предложения 1.14, имеем $\text{dis } R \leq \text{dis}(X \times Y)$. Осталось заметить, что $\text{dis}(X \times Y) = \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$.

(3) Если $\text{diam } X = \text{diam } Y$, то неравенство имеет место. Пусть $\text{diam } X > \text{diam } Y$, тогда диаметр Y конечен. Выберем произвольные $R \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$ и рассмотрим последовательности $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \in R$ такие, что $|x_n x'_n| \rightarrow \text{diam } X$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, начиная с некоторого n , выполняется $|x_n x'_n| > \text{diam } Y \geq |y_n y'_n|$, откуда для всех таких n имеем

$$||x_n x'_n| - |y_n y'_n|| = |x_n x'_n| - |y_n y'_n| \geq |x_n x'_n| - \text{diam } Y \rightarrow (\text{diam } X - \text{diam } Y) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

поэтому $\text{dis } R \geq \text{diam } X - \text{diam } Y = |\text{diam } X - \text{diam } Y|$. В силу произвольности R , получаем требуемое.

(4) По пункту (3) имеем $2d_{GH}^{gen}(\lambda X, \mu X) \geq |\text{diam}(\lambda X) - \text{diam}(\mu X)| = |\lambda - \mu| \text{diam } X$. Чтобы доказать обратное неравенство, пусть $R: \lambda X \rightarrow \mu X$ — тождественное отображение, тогда, в силу следствия 1.29, это R содержится во всех пяти $\mathcal{R}_{gen}(X, X)$. Осталось заметить, что $\text{dis } R = |\lambda - \mu| \text{diam } X$.

(5) Для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ обозначим R_λ то же самое соответствие, но рассматриваемое как элемент $\mathcal{R}(\lambda X, \lambda Y)$. Тогда $\text{dis } R_\lambda = \lambda \text{dis } R$, откуда и вытекает утверждение этого пункта.

(6) Это вытекает из того, что все отображения между X и Y , как однозначные, так и многозначные, — непрерывны.

(7) Это следует из неравенства $d_{GH} \leq d_{GH}^{gen}$. □

Замечание 1.40. Анализ фактов, которыми мы пользовались при доказательствах теоремы 1.37 и предложения 1.39 (кроме пункта 6), позволяет получить следующее обобщение. Для каждой пары (X, Y) метрических пространств обозначим $\mathcal{R}_g(X, Y)$ **непустое** подмножество в $\mathcal{R}(X, Y)$ и потребуем, чтобы выполнялись следующие свойства:

- для любого метрического пространства X тождественное отображение id содержится в $\mathcal{R}_g(X, X)$;
- для любых метрических пространств X, Y и Z выполняется $\mathcal{R}_g(Y, Z) \circ \mathcal{R}_g(X, Y) \subset \mathcal{R}_g(X, Z)$;
- для любых метрических пространств X, Y имеем $\mathcal{R}_g(Y, X) = [\mathcal{R}_g(X, Y)]^{-1}$.

Отметим, что первые два условия определяют **категорию**, в которой **объектами** являются метрические пространства, а **морфизмами** — соответствия из $\mathcal{R}_g(X, Y)$.

Определим **g -расстояние** Громова–Хаусдорфа по формуле

$$d_{GH}^g(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}_g(X, Y) \}.$$

Тогда $d_{GH}^g(X, Y)$ удовлетворяет теореме 1.37 и предложению 1.39 (кроме, возможно, пункта 6), в которых $\mathcal{R}_{gen}$ заменено на $\mathcal{R}_g$.

Тема 2

Элементы теории многозначных отображений

Материал этой лекции тесно связан с монографией [19].

Для работы с полунепрерывностями многозначных отображений оказывается полезно описать ряд конструкций.

2.1 Теоретико-множественные свойства многозначных отображений

Пусть $f: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение множеств. **Малым прообразом множества** $D \subset Y$ называется множество

$$f_+^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \subset D\}.$$

Полным прообразом множества $D \subset Y$ называется множество

$$f_-^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $f_+^{-1}(D) \subset f_-^{-1}(D)$.

Приведем ряд свойств малого и полного прообразов.

Лемма 2.1. Пусть $f: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение множеств. Тогда для каждого $A \subset X$, $D \subset Y$ и произвольного семейства $\{D_j \subset Y\}_{j \in J}$ выполняются следующие включения и равенства:

- (1) $f_+^{-1}(f(A)) \supset A$ и $f_-^{-1}(f(A)) \supset A$;
- (2) $f(f_+^{-1}(D)) \subset D$ и $f(f_-^{-1}(D)) \supset D \cap f(X)$;
- (3) $X \setminus f_+^{-1}(D) = f_-^{-1}(X \setminus D)$ и $X \setminus f_-^{-1}(D) = f_+^{-1}(X \setminus D)$;
- (4) $f_+^{-1}(\cup_{j \in J} D_j) \supset \cup_{j \in J} f_+^{-1}(D_j)$ и $f_-^{-1}(\cup_{j \in J} D_j) = \cup_{j \in J} f_-^{-1}(D_j)$;
- (5) $f_+^{-1}(\cap_{j \in J} D_j) = \cap_{j \in J} f_+^{-1}(D_j)$ и $f_-^{-1}(\cap_{j \in J} D_j) \subset \cap_{j \in J} f_-^{-1}(D_j)$.

Доказательство. Отметим, что для пустых A , D и семейства $\{D_j\}_{j \in J}$ утверждения очевидны, поэтому в дальнейшем предполагаем, что все эти множества непусты.

(1) Пусть теперь $a \in A$, тогда $f(a) \subset f(A)$. Множество $f_+^{-1}(f(A))$ состоит из всех $x \in X$, для которых $f(x) \subset f(A)$, поэтому $A \subset f_+^{-1}(f(A))$. Множество $f_-^{-1}(f(A))$ состоит из всех $x \in X$, для которых $f(x) \cap f(A) \neq \emptyset$, поэтому $A \subset f_-^{-1}(f(A))$.

(2) Пусть $y \in f(f_+^{-1}(D))$, тогда существует $x \in f_+^{-1}(D)$ такой, что $y \in f(x)$. По определению малого прообраза, $f(x) \subset D$, откуда $y \in D$.

Пусть теперь $y \in D \cap f(X)$, тогда существует $x \in X$, для которого $y \in f(x)$. Так как $y \in D$, то $f(x) \cap D \neq \emptyset$, поэтому $x \in f_-^{-1}(D)$, откуда $y \in f(f_-^{-1}(D))$.

(3) Доказательства первого равенства:

$$x \in X \setminus f_+^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \not\subset D \Leftrightarrow f(x) \cap (Y \setminus D) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in f_-^{-1}(Y \setminus D).$$

Доказательства второго равенства:

$$x \in X \setminus f_-^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \cap D = \emptyset \Leftrightarrow f(x) \subset Y \setminus D \Leftrightarrow x \in f_+^{-1}(Y \setminus D).$$

(4) Пусть $x \in \cup_{j \in J} f_+^{-1}(D_j)$, тогда для некоторого $i \in J$ имеем $x \in f_+^{-1}(D_i)$, так что $f(x) \subset D_i \subset \cup_{j \in J} D_j$, откуда $x \in f_+^{-1}(\cup_{j \in J} D_j)$.

Второе равенство докажем так:

$$x \in \bigcup_{j \in J} f_-^{-1}(D_j) \Leftrightarrow \exists i \in J, x \in f_-^{-1}(D_i) \Leftrightarrow \exists i \in J, f(x) \cap D_i \neq \emptyset \Leftrightarrow f(x) \cap \bigcup_{j \in J} D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in f_-^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} D_j\right).$$

(5) Докажем первое равенство:

$$x \in \bigcap_{j \in J} f_+^{-1}(D_j) \Leftrightarrow \forall j \in J, x \in f_+^{-1}(D_j) \Leftrightarrow \forall j \in J, f(x) \subset D_j \Leftrightarrow f(x) \subset \bigcap_{j \in J} D_j \Leftrightarrow x \in f_+^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} D_j\right).$$

Для доказательства второго включения, пусть $x \in f_-^{-1}(\cap_{j \in J} D_j)$, тогда $f(x) \cap (\cap_{j \in J} D_j) \neq \emptyset$, поэтому $f(x) \cap D_j \neq \emptyset$ для всех $j \in J$ и, значит, $x \in f_-^{-1}(D_j)$ для всех $j \in J$, т.е. $x \in \cap_{j \in J} f_-^{-1}(D_j)$. $\square$

Определим теперь ряд операций над многозначными отображениями.

Пусть $\{f_j: X \rightrightarrows Y\}_{j \in J}$ — произвольное семейство многозначных отображений множества X во множество Y , тогда **объединение** $f := \cup_{j \in J} f_j$, и **произведение** $h := \prod_{j \in J} f_j$ — многозначные отображения из X в Y , которые задаются так:

$$\forall x \in X \quad f(x) = \bigcup_{j \in J} f_j(x), \quad h(x) = \prod_{j \in J} f_j(x).$$

Что касается **пересечения** $g := \cap_{j \in J} f_j$, то в силу нашего требования непустоты каждого $g(x)$, это пересечение является многозначным отображением только при дополнительном ограничении $\cap_{j \in J} f_j(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, и тогда оно естественно определяется как

$$\forall x \in X \quad g(x) = \bigcap_{j \in J} f_j(x)$$

Лемма 2.2. Пусть $\{f_j: X \rightrightarrows Y\}_{j \in J}$ — произвольное семейство многозначных отображений множества X во множество Y , $\{g_j: X \rightrightarrows Y\}_{j \in J}$ — произвольное семейство многозначных отображений множества X во множество Y , $a \subset Y$ и $D_j \subset Y_j$, $j \in J$, — любые подмножества, тогда

- (1) $\left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)_+^{-1}(D) = \cap_{j \in J} (f_j)_+^{-1}(D)$ и $\left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)_-^{-1}(D) = \bigcup_{j \in J} (f_j)_-^{-1}(D)$;
- (2) $\left(\bigcap_{j \in J} f_j\right)_+^{-1}(D) \supset \bigcup_{j \in J} (f_j)_+^{-1}(D)$ и $\left(\bigcap_{j \in J} f_j\right)_-^{-1}(D) \subset \cap_{j \in J} (f_j)_-^{-1}(D)$;
- (3) $\left(\prod_{j \in J} g_j\right)_+^{-1}\left(\prod_{j \in J} D_j\right) = \cap_{j \in J} (g_j)_+^{-1}(D_j)$ и $\left(\prod_{j \in J} g_j\right)_-^{-1}\left(\prod_{j \in J} D_j\right) = \bigcap_{j \in J} (g_j)_-^{-1}(D_j)$.

Доказательство. (1) Докажем первое равенство:

$$x \in \left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)_+^{-1}(D) \Leftrightarrow \left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)(x) \subset D \Leftrightarrow \forall j \in J, f_j(x) \subset D \Leftrightarrow \bigcup_{j \in J} f_j(x) \subset D \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} (f_j)_+^{-1}(D).$$

Докажем второе равенство:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)_-^{-1}(D) &\Leftrightarrow \left(\bigcup_{j \in J} f_j\right)(x) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists i \in J, f_i(x) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists i \in J, x \in (f_i)_-^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} (f_j)_-^{-1}(D). \end{aligned}$$

(2) Пусть $x \in \bigcup_{j \in J} (f_j)_+^{-1}(D)$, тогда существует $i \in J$ такое, что $x \in (f_i)_+^{-1}(D)$, т.е. $f_i(x) \subset D$, но тогда $(\bigcap_{j \in J} f_j)(x) = \bigcap_{j \in J} (f_j(x)) \subset D$, откуда $x \in (\bigcap_{j \in J} f_j)_+^{-1}(D)$.

Пусть теперь $x \in \left(\bigcap_{j \in J} f_j\right)_-^{-1}(D)$, т.е. $(\bigcap_{j \in J} f_j)(x) \cap D \neq \emptyset$ и, значит, $(\bigcap_{j \in J} f_j(x)) \cap D \neq \emptyset$, поэтому $f_j(x) \cap D \neq \emptyset$ для всех $j \in J$, или, другими словами, $x \in (f_j)_-^{-1}(D)$ для всех $j \in J$, откуда $x \in \bigcap_{j \in J} (f_j)_-^{-1}(D)$.

(3) Докажем первое равенство:

$$\begin{aligned} x \in \left(\prod_{j \in J} g_j\right)_+^{-1} \left(\prod_{j \in J} D_j\right) &\Leftrightarrow \left(\prod_{j \in J} g_j\right)(x) \subset \prod_{j \in J} D_j \Leftrightarrow \forall j \in J, g_j(x) \subset D_j \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J, x \in (g_j)_+^{-1}(D_j) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} (g_j)_+^{-1}(D_j). \end{aligned}$$

Докажем второе равенство:

$$\begin{aligned} x \in \left(\prod_{j \in J} g_j\right)_-^{-1} \left(\prod_{j \in J} D_j\right) &\Leftrightarrow \left(\prod_{j \in J} g_j\right)(x) \cap \prod_{j \in J} D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall j \in J, g_j(x) \cap D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J, x \in (g_j)_-^{-1}(D_j) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} (g_j)_-^{-1}(D_j). \end{aligned}$$

□

Композиция многозначных отображений определяется как композиция соответствующих отношений.

Лемма 2.3. Пусть $f: X \rightrightarrows Y$ и $g: Y \rightrightarrows Z$ — многозначные отображения и $D \subset Z$. Тогда

$$(g \circ f)_+^{-1}(D) = f_+^{-1}(g_+^{-1}(D)) \quad \text{и} \quad (g \circ f)_-^{-1}(D) = f_-^{-1}(g_-^{-1}(D)).$$

Доказательство. Докажем первое равенство:

$$x \in (g \circ f)_+^{-1}(D) \Leftrightarrow g(f(x)) \subset D \Leftrightarrow \forall y \in f(x), g(y) \subset D \Leftrightarrow f(x) \subset g_+^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in f_+^{-1}(g_+^{-1}(D)).$$

Докажем второе равенство:

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)_-^{-1}(D) &\Leftrightarrow g(f(x)) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y \in f(x), g(y) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y \in f(x), y \in g_-^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \cap g_-^{-1}(D) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in f_-^{-1}(g_-^{-1}(D)). \end{aligned}$$

□

2.2 Топологические свойства многозначных отображений

Теорема 2.4 ([19]). Пусть $f: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение топологических пространств. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f полунепрерывно сверху;
- (2) для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $f_+^{-1}(U)$ открыто в X ;
- (3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ множество $f_-^{-1}(W)$ замкнуто в X ;
- (4) для любого множества $D \subset Y$ выполняется $f_-^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_-^{-1}(D)}$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Пусть f — полунепрерывно сверху. Так как, по определению f_+^{-1} , для каждого открытого $U \subset Y$ и любой точки $x \in f_+^{-1}(U)$ имеем $f(x) \subset U$, то, в силу непрерывности сверху, существует такая окрестность V^x точки x , что для всех $x' \in V^x$ выполняется $f(x') \subset U$, откуда $V^x \subset f_+^{-1}(U)$. Так как x произвольна, то $f_+^{-1}(U)$ — открытое подмножество X .

Обратно, пусть для каждого открытого $U \subset Y$ множество $f_+^{-1}(U)$ открыто. Выберем произвольную точку $x \in X$, произвольную окрестность $U \supset f(x)$, тогда $x \in f_+^{-1}(U)$, и так как $f_+^{-1}(U)$ открыто, существует окрестность $V^x \subset f_+^{-1}(U)$, но это означает, что для всех точек $x' \in V^x$ выполняется $f(x') \subset U$, а это и есть определение полунепрерывности сверху в точке x .

(3) $\Leftrightarrow$ (2) Пусть выполняется (2). Так как $W = Y \setminus U$, где U — открыто, то $f_+^{-1}(U)$ — открыто по предположению, так что $F = X \setminus f_+^{-1}(U)$ — замкнуто. Множество F состоит из всех точек $x \in X$, для которых $f(x) \not\subset U$, а это означает, что F состоит в точности из тех точек x , для которых $f(x)$ пересекает W . Но по определению $F = f_-^{-1}(W)$, тем самым, доказана замкнутость последнего множества.

Обратно, пусть теперь выполняется (3), и мы начинаем с открытого множества $U \subset Y$. Для него множество $W = Y \setminus U$ замкнуто, поэтому, в силу (3), $f_-^{-1}(W)$ также замкнуто, а состоит это множество в точности из всех $x \in X$, для которых $f(x) \cap W \neq \emptyset$. Но тогда $V := X \setminus f_-^{-1}(W)$ открыто и состоит в точности из тех точек $x \in X$, для которых $f(x) \subset U$, а значит $V = f_+^{-1}(U)$, что доказывает открытость последнего множества.

(4) $\Leftrightarrow$ (3) Если выполняется (3), то $f_-^{-1}(\bar{D})$ замкнуто, и так как $f_-^{-1}(\bar{D}) \supset f_-^{-1}(D)$, то, в силу замкнутости $f_-^{-1}(\bar{D})$, имеем $f_-^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_-^{-1}(D)}$.

Обратно, пусть выполняется (4). Возьмем произвольное замкнутое множество $D \subset Y$, тогда в силу (4) $f_-^{-1}(D) = \overline{f_-^{-1}(D)}$ и, значит, $f_-^{-1}(D)$ замкнуто. $\square$

Теорема 2.5. Пусть X и Y — непустые компактные топологические пространства, причем X еще и хаусдорфово, и пусть $f: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение такое, что его график $f \subset X \times Y$ замкнут. Тогда f полунепрерывно сверху.

Доказательство. Выберем произвольное замкнутое $W \subset Y$ и обозначим $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ стандартную проекцию, тогда

$$f_-^{-1}(W) = \{x \in X : f(x) \cap W \neq \emptyset\} = \{x \in X : \exists y \in W, y \in f(x)\} = \pi_X[(X \times W) \cap f].$$

Так как $X \times W$ замкнуто в $X \times Y$, то и $(X \times W) \cap f$ также замкнуто, а потому и компактно в силу компактности $X \times Y$. Так как проекция π_X непрерывна, а непрерывный образ компакта тоже компакт, множество $f_-^{-1}(W) \subset X$ компактно, и, значит, замкнуто в силу хаусдорфовости X . Таким образом, по теореме 2.4, многозначное отображение f полунепрерывно сверху. $\square$

Из теоремы 2.5 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 2.6. Пусть X и Y — непустые компактные хаусдорфовы топологические пространства, тогда каждое замкнутое соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, вместе со своим обратным, полунепрерывны сверху. Иными словами, $\bar{\mathcal{R}}(X, Y) \subset \mathcal{R}_{us}(X, Y)$.

Следствие 2.7. Пусть X и Y — непустые компактные метрические пространства, тогда

$$d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y).$$

Доказательство. По следствию 2.6, имеем $d_{GH}(X, Y) \geq d_{GH}^{us}(X, Y)$. Обратное неравенство содержится в предложении 1.31. $\square$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.8. Пусть $A \subset X$ и $B \subset Y$ — непустые подмножества метрических пространств, а $R \subset A \times B$ замкнуто в $A \times B$. Пусть $(a_n, b_n) \in R$ — последовательность, для которой $a_n \rightarrow a \in A$ и $b_n \rightarrow b \in B$. Тогда $(a, b) \in R$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $(a, b) \notin R$. Так как R замкнуто в $A \times B$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $(U_\varepsilon(a) \cap A) \times (U_\varepsilon(b) \cap B)$ не пересекает R . Но при достаточно больших n имеем $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap A$ и $b_n \in U_\varepsilon(b) \cap B$, противоречие. $\square$

Теорема 2.9. Пусть $Y \subset X$ — непустое подмножество компактного метрического пространства X , тогда $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$.

Доказательство. Для произвольных $R' \in \bar{\mathcal{R}}(Y, X)$ и $\varepsilon > 0$, продолжим R' до $R \in \mathcal{R}(\bar{Y}, X)$ так: для каждой точки $y' \in \bar{Y} \setminus Y$

- рассмотрим произвольную последовательность $y'_n \in Y$, $y'_n \rightarrow y'$;
- для каждого n выберем $x'_n \in X$ такой, что $(y'_n, x'_n) \in R'$;
- воспользовавшись компактностью X , выберем в последовательности x'_n подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x' \in X$;
- без ограничения общности будем считать, что $x'_n \rightarrow x'$;
- добавим все так полученные (y', x') к R' .

Далее, пусть $\bar{R} \subset \bar{Y} \times X$ — замыкание R в $\bar{Y} \times X$. По следствию 2.6, многозначное отображение $\bar{R}: \bar{Y} \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху. По предложению 1.27, ограничение $\bar{R}|_Y$ также полунепрерывно сверху.

Покажем, что $\bar{R}|_Y = R'$. Выберем произвольную точку $(y, x) \in \bar{R}|_Y$, тогда существует последовательность $(y_n, x_n) \in R$, сходящаяся к (y, x) . По построению, для каждого y_n имеется две возможности:

- или $y_n \in Y$, тогда его не меняем;
- или $y_n \in \bar{Y} \setminus Y$, но тогда, по построению, существует $y'_n \in Y$ такой, что $(y'_n, x'_n) \in R'$ и $|y'_n y_n| < 1/n$; в этом случае заменим пару (y_n, x_n) на (y'_n, x'_n) .

Отметим, что для так перестроенной последовательности (y_n, x_n) выполняется $(y_n, x_n) \in R'$ для всех n , $y_n \rightarrow y$, $x_n \rightarrow x$. Так как $y \in Y$, а R' замкнуто, то, в силу леммы 2.8, $(y, x) \in R'$.

Таким образом, мы показали, что $\bar{\mathcal{R}}(Y, X) \subset \mathcal{R}_{us}(Y, X)$, что и завершает доказательство. $\square$

Из теоремы 2.9 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 2.10. Пусть $Y \subset X$ — всюду плотное подмножество непустого компактного метрического пространства, тогда $d_{GH}^{us}(X, Y) = 0$.

Следствие 2.11. Пусть X и Y — вполне ограниченные метрические пространства, тогда $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$.

Доказательство. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — пополнения пространств X и Y соответственно, тогда $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ компактны, а X и Y — их всюду плотные подмножества. Осталось воспользоваться теоремой 2.7, следствием 2.10 и неравенством треугольника для d_{GH}^{us} . $\square$

Следствие 2.12. Пусть X и Y — ограниченно компактные метрические пространства (т.е. в них все замкнутые шары компактны), причем $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Тогда $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$.

Доказательство. Достаточно выбрать произвольное замкнутое соответствие $R \in \bar{\mathcal{R}}(X, Y)$, для которого $\text{dis } R < \infty$, и показать, что для любой $x \in X$ многозначное отображение R полунепрерывно сверху в x .

Рассмотрим произвольные открытый и замкнутый шары $U := U_r(x)$ и $A := B_r(x)$ соответственно. Так как $\text{dis } R < \infty$, то множество $R(A)$ ограничено, поэтому существует такой открытый шар $V := U_s(y) \subset Y$, что $R(A) \subset V$. Положим $B = B_s(y)$. Так как X и Y — ограниченно компактные пространства, то A и B — компакты. Многозначное отображение $R|_A$ отображает метрический компакт A в метрический компакт B . Так как R замкнуто в $X \times Y$, то $R|_A = (A \times B) \cap R$ замкнуто в $A \times B$. По теореме 2.5 многозначное отображение $R|_A$ полунепрерывно сверху.

Пусть $W \subset Y$ — произвольное открытое в Y множество, содержащее $R(x)$. Так как $R(x) \subset R(A) \subset V$, то $R(x) \subset V \cap W \subset B$, причем $V \cap W$ — открытое множество в Y и, поэтому, — также открытое множество в топологии, индуцированной на B . Так как $R|_A$ полунепрерывно сверху, существует такая окрестность W^x в A , что для всех $x' \in W^x$ выполняется $R(x') = R|_A(x') \subset V \cap W$. Заметим, что множество $W^x \cap U$ открыто в X , поэтому оно является открытой окрестностью точки x и в X . Таким образом, мы построили такую окрестность в X точки x , что для всех ее точек x' множество $R(x')$ содержится в произвольно выбранной окрестности в Y множества $R(x)$, что и доказывает полунепрерывность сверху многозначного отображения R в точке x . $\square$

Замечание 2.13. Если X и Y — непустые компактные метрические пространства, то замкнутость соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ не влечет, вообще говоря, его полунепрерывность снизу. Достаточно рассмотреть $X = Y = [0, 1]$, а $R = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$. Действительно, покажем, что это отображение не является полунепрерывным снизу в 0. Пусть $U = (1/2, 1] \subset Y$, тогда $U \cap R(0) \neq \emptyset$, однако для любой окрестности $V \subset X$ точки 0 и каждой точки $x' \in V \setminus \{0\}$ имеем $R(x') = \{0\} \cap U = \emptyset$. Таким образом, полунепрерывных снизу замкнутых соответствий в общем случае меньше, чем полунепрерывных сверху.

Теорема 2.14 ([19]). Пусть $f: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение топологических пространств. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f полунепрерывно снизу;
- (2) для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $f_-^{-1}(U)$ открыто в X ;
- (3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ множество $f_+^{-1}(W)$ замкнуто в X ;
- (4) для любого множества $D \subset Y$ выполняется $f_-^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_-^{-1}(D)}$;
- (5) если $\{U_i\}$ — база топологии пространства Y , то для любого $U_i \subset Y$ множество $f_-^{-1}(U_i)$ открыто в X ;
- (6) для любого множества $D \subset Y$ выполняется $f_+^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_+^{-1}(D)}$;
- (7) для любого множества $A \subset X$ выполняется $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) доказывается абсолютно так же, как и соответствующие эквивалентности в доказательстве теоремы 2.4.

(5) $\Leftrightarrow$ (2) Если f полунепрерывно снизу, то для любого открытого $U \subset Y$, в частности, для $U_i \subset Y$ множество $f_-^{-1}(U)$ открыто в силу пункта (2). Обратно, если для всех U_i множества $f_-^{-1}(U_i)$ открыты, то так как каждое открытое $U \subset Y$ равно $\cup_{i \in J} U_i$, и, в силу леммы 2.1, выполняется $f_-^{-1}(U) = f_-^{-1}(\cup_{i \in J} U_i) = \cup_{i \in J} f_-^{-1}(U_i)$, то получаем, что для любого открытого $U \subset Y$ множество $f_-^{-1}(U)$ открыто, а это равносильно полунепрерывности снизу f в силу пункта (2).

(6) Если выполняется (1), то $f_+^{-1}(\bar{D})$ замкнуто в силу пункта (3), и так как $f_+^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_+^{-1}(D)}$, то, в силу замкнутости $f_+^{-1}(\bar{D})$, имеем $f_+^{-1}(\bar{D}) \supset \overline{f_+^{-1}(D)}$.

Обратно, пусть выполняется (6). Возьмем произвольное замкнутое множество $D \subset Y$, тогда в силу (6) $f_+^{-1}(D) = \overline{f_+^{-1}(D)}$ и, значит, $f_+^{-1}(D)$ замкнуто, поэтому (1) имеет место в силу (3).

(7) $\Leftrightarrow$ (2) Пусть выполняется (2). Берем произвольное $A \subset X$, тогда $F(A) \subset \overline{F(A)}$, поэтому для открытого $U := Y \setminus \overline{F(A)}$ открытое в силу (2) множество $V = f_-^{-1}(U)$ не пересекает A и, в силу открытости V , выполняется $\bar{A} \cap V = \emptyset$. Но это означает, что $F(\bar{A})$ лежит в дополнении к U , т.е. в $\overline{F(A)}$, так что имеет место (7).

Пусть теперь выполняется (7). Для доказательства (2) возьмем произвольное открытое $U \subset Y$ и покажем, что $V := f_-^{-1}(U)$ открыто в X , что эквивалентно замкнутости множества $A := X \setminus U$. По определению, $V = \{x \in X : f(x) \cap U \neq \emptyset\}$, поэтому $A = \{x \in X : f(x) \cap U = \emptyset\}$. Предположим, что A не замкнуто, тогда $\bar{A}$ содержит точку x , для которой $f(x) \cap U \neq \emptyset$, но такая точка x принадлежит $f_-^{-1}(U)$, поэтому $f(\bar{A}) \cap U \neq \emptyset$. С другой стороны, $f(A) \cap U = \emptyset$ и, в силу открытости U , имеем $\overline{f(A)} \cap U = \emptyset$. В силу (7) имеем $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, поэтому и $f(\bar{A}) \cap U = \emptyset$, противоречие, что и завершает доказательство (2). $\square$

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется **открытым**, если образ каждого открытого множества открыт. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.15. Пусть X и Y — топологические пространства, а $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ — стандартная проекция, то π_X — открытое отображение.

Доказательство. Пусть $U \subset X \times Y$ — произвольное открытое множество, $V = \pi_X(U)$, $x \in V$ — любая точка, тогда существует точка $y \in U$ такая, что $\pi_X(y) = x$. По определению топологии декартова произведения, существуют окрестности $U^x \subset X$ и $U^y \subset Y$ такие, что $U^x \times U^y \subset U$, поэтому $U^x \subset V$, так что V — открытое множество. $\square$

Теорема 2.16. Пусть X и Y — топологические пространства, а $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ — открытое подмножество $X \times Y$, тогда $R: X \rightrightarrows Y$ и $R^{-1}: Y \rightrightarrows X$ — полунепрерывные снизу многозначные отображения. Иными словами, $R \in \mathcal{R}_{ls}(X, Y)$.

Доказательство. Докажем полунепрерывность снизу для R (для R^{-1} доказательство аналогично). Выберем произвольное открытое $U \subset Y$, тогда, как мы уже отмечали, $R_-^{-1}(U) = \pi_X[(X \times U) \cap R]$, и так как $X \times U$ открыто, R открыто, то $(X \times U) \cap R$ — открыто. По лемме 2.15, $\pi_X[(X \times U) \cap R]$ открыто, так что R полунепрерывно снизу по теореме 2.14. $\square$

Следствие 2.17. Пусть X и Y — непустые метрические пространства, тогда $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}^{ls}(X, Y)$.

Доказательство. По теореме 2.16, для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, $\varepsilon > 0$ и $R_\varepsilon := U_\varepsilon(R)$ выполняется $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_{ls}(X, Y)$. С другой стороны, по предложению 1.21, $\inf_\varepsilon \text{dis } R_\varepsilon = \text{dis } R$, поэтому

$$2d_{GH}(X, Y) = \inf_{R \in \mathcal{R}(X, Y)} \text{dis } R = \inf_{R \in \mathcal{R}(X, Y), \varepsilon > 0} \text{dis } R_\varepsilon \geq \inf_{R \in \mathcal{R}_{ls}(X, Y)} \text{dis } R = 2d_{GH}^{ls}(X, Y).$$

Осталось применить предложение 1.31. □

Тема 3

Полнота, внутреннее расстояние и геодезические

В этой лекции мы докажем несколько фундаментальных свойств собственного класса $\mathcal{GH}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Как мы уже замечали, классическое GH -расстояние может быть как бесконечным, так и равняться нулю между неизометричными пространствами, т.е. это расстояние является обобщенной псевдометрикой. Пусть X — или собственный класс, или множество, на котором задана обобщенная псевдометрика d . Рассмотрим на X следующее отношение: элементы x и y находятся в этом отношении, если и только если $d(x, y) < \infty$. Такое отношение является эквивалентностью, и мы называем его **эквивалентностью конечных расстояний**. При этом соответствующие классы эквивалентности мы называем **облаками**. Как обычно, класс эквивалентности, содержащий элемент x , обозначается $[x]$. Ясно, что на каждом облаке функция d является псевдометрикой. Примером облака в $\mathcal{GH}$ может служить класс $\mathcal{B}$ всех ограниченных метрических пространств. Ясно, что $\mathcal{B} = [\Delta_1]$. Другим интересным классом в $\mathcal{GH}$ является класс $[\mathbb{R}]$, содержащий вещественную прямую со стандартной функцией расстояния.

Далее, рассмотрим на X другое отношение, которое мы обозначим ν : элементы x и y находятся в этом отношении, если и только если $d(x, y) = 0$. Отношение ν тоже является эквивалентностью, и мы называем его **эквивалентностью нулевых расстояний**. Для произвольных $(x, x'), (y, y') \in \nu$ неравенство треугольника дает $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y')$ и аналогично $d(x', y') \leq d(x, y)$, откуда $d(x, y) = d(x', y')$, т.е. расстояние d между элементами классов $[x]$ и $[y]$ эквивалентности ν не зависит от выбора этих элементов. Последнее позволяет определить расстояние $|[x][y]|$ между классами эквивалентности ν , положив его равным $d(x, y)$. Легко проверяется, что полученное расстояние является обобщенной метрикой. Если каждый класс эквивалентности нулевых расстояний — множество, то определен фактор-класс X/ν , элементы которого — эти множества. Этот фактор-класс, вместе с обобщенной метрикой, будем называть **фактор-пространством**.

Наконец, если сначала разбить класс X на облака, а потом каждое облако разбить на классы нулевых расстояний, то на каждом из полученных фактор-пространств расстояние, индуцированное функцией d , будет (конечной) метрикой. Эта конструкция применима к собственному классу $\mathcal{GH}$: хотя все облака в $\mathcal{GH}$ являются собственными классами [34], в каждом облаке каждый подкласс эквивалентности нулевых расстояний является множеством [35]. **В дальнейшем мы всегда будем предполагать, не оговаривая это специально, что в рассматриваемых случаях классы эквивалентности нулевых расстояний являются множествами.**

3.1 Внутренние метрики и геодезические

Для соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ между псевдометрическими пространствами его **искажение** определяется ровно по той же формуле, что и между метрическими. Если ν — эквивалентность нулевых расстояний, то построим по R соответствие $R/\nu \in \mathcal{R}(X/\nu, Y/\nu)$, положив

$$(R/\nu)([x]) = \bigcup_{x' \in [x]} \{[y] : y \in R(x')\}.$$

Лемма 3.1. Пусть X и Y — псевдометрические пространства. Тогда для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ и соответствующего $R/\nu \in \mathcal{R}(X/\nu, Y/\nu)$ имеем $\text{dis } R = \text{dis}(R/\nu)$.

Доказательство. Для любых $([x], [y]), ([x'], [y']) \in \mathcal{R}(X/\nu, Y/\nu)$ существует $z \in [y]$ и $z' \in [y']$ такие, что $(x, z), (x', z') \in R$, поэтому

$$\left| |[x][x']| - |[y][y']| \right| = ||xx'| - |zz'|\|.$$

Обратно, для любых $(x, y), (x', y') \in R$ имеем $([x], [y]), ([x'], [y']) \in \mathcal{R}(X/\nu, Y/\nu)$ и

$$||xx'| - |yy'|\| = \left| |[x][x']| - |[y][y']| \right|.$$

Таким образом, множества чисел, по которым вычисляются $\text{dis } R$ и $\text{dis}(R/\nu)$, одинаковы, откуда $\text{dis } R = \text{dis}(R/\nu)$. $\square$

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, для которых $2d_{GH}^{gen}(X, Y) < \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существует $R \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$, для которого $\text{dis } R < 2d_{GH}^{gen}(X, Y) + 2\varepsilon$. Для каждого $t \in [0, 1]$ зададим на R псевдометрику d_t так:

$$d_t((x, y), (x', y')) = (1 - t)|xx'| + t|yy'|,$$

и полученное псевдометрическое пространство обозначим R_t . Легко видеть, что при $0 < t < 1$ псевдометрика d_t является метрикой, при $t = 0$ пространство R_t/ν изометрично X , а при $t = 1$ это пространство изометрично Y .

Определение 3.2. Пусть X — произвольное обобщенное псевдометрическое пространство с функцией расстояния d . Если для любых двух точек $x, y \in X$, находящихся на конечном расстоянии, и любого $\varepsilon > 0$ существует кривая γ в X , соединяющая x и y , у которой длина $|\gamma|$ удовлетворяет $|\gamma| < |xy| + \varepsilon$, то такая d называется **внутренней**. Эквивалентное определение: обобщенная псевдометрика **внутренняя**, если и только если расстояние между каждой парой точек равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки. Отметим, что при $|xy| = \infty$ множество всех γ , соединяющих x и y , пусто, поэтому здесь $\inf_{\emptyset} |\gamma| = \infty$, так что при таком определении не нужно отдельно рассматривать случай $|xy| < \infty$.

Теорема 3.3. Во введенных выше обозначениях, имеем $2d_{GH}^{gen}(R_t, R_s) \leq |t - s| \text{dis } R$. В частности,

- отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{GH}$, $\gamma: t \mapsto R_t$, является непрерывной кривой по отношению к d_{GH}^{gen} ;
- d_{GH}^{gen} -длина $|\gamma|$ этой кривой удовлетворяет неравенству $|\gamma| < d_{GH}^{gen}(X, Y) + \varepsilon$;
- расстояние d_{GH}^{gen} — внутреннее.

Доказательство. Пусть $0 \leq t, s \leq 1$, а $R' \in \mathcal{R}(R_t, R_s)$ — соответствие, порожденное тождественным отображением. Тогда, в силу леммы 3.1,

$$\begin{aligned} \text{dis}(R'/\nu) = \text{dis } R' &= \sup_{(x, y), (x', y') \in R} \left| d_t((x, y), (x', y')) - d_s((x, y), (x', y')) \right| = \\ &= \sup_{(x, y), (x', y') \in R} |t - s| ||xx'| - |yy'|\| = |t - s| \text{dis } R, \end{aligned}$$

поэтому

$$d_{GH}^{gen}(R_t/\nu, R_s/\nu) = d_{GH}^{gen}(R_t, R_s) = \frac{1}{2} \inf_{R'' \in \mathcal{R}_{gen}(R_t, R_s)} \text{dis } R'' \leq \frac{1}{2} |t - s| \text{dis } R,$$

откуда непосредственно вытекает, что отображение $\gamma: t \mapsto R_t/\nu$ непрерывно относительно d_{GH}^{gen} , а длина $|\gamma|$ кривой γ относительно d_{GH}^{gen} не превосходит $\frac{1}{2} \text{dis } R < d_{GH}^{gen}(X, Y) + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым, приходим к выводу, что расстояние d_{GH}^{gen} — внутреннее. $\square$

Определение 3.4. Для обобщенного псевдометрического пространства X кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ называется **кратчайшей геодезической**, если для некоторого $\lambda \geq 0$ выполняется следующее условие: для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ длина $|\gamma|_{[\alpha, \beta]}$ кривой $\gamma|_{[\alpha, \beta]}$ равна $\lambda |\alpha\beta|$ (на отрезке $[a, b]$ рассматривается стандартное расстояние). Число λ называется **скоростью кривой** γ .

Замечание 3.5. Для $a < b$ кратчайшая геодезическая γ отображает отрезок $[a, b]$ в точку (такие кривые мы называем **точечными**), если и только если $\lambda = 0$. Для $a = b$ кратчайшая геодезическая γ всегда является точечной, а в качестве λ можно взять любое неотрицательное число. Далее, при $\lambda > 0$ аффинные замены и только они сохраняют свойство γ быть кратчайшей геодезической (при это скорость может меняться). При $\lambda = 0$ кривая точечная и годятся любые замены.

Произвольная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ называется **безостановочной**, если для любого $t \in [a, b]$ и любой окрестности $U^t \subset [a, b]$ кривая $\gamma|_{U^t}$ не является точечной. Можно показать [17], что если длина безостановочной кривой γ , соединяющей x и y , равна $|xy|$, то некоторой заменой параметра эту кривую можно превратить в кратчайшую геодезическую.

Как и в стандартной теории соответствие $R \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$ назовем **оптимальным**, если $2d_{GH}^{gen}(X, Y) = \text{dis } R$.

Следствие 3.6. Если соответствие $R \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$ — оптимальное, то построенная выше кривая R_t — кратчайшая геодезическая в $(\mathcal{GH}, d_{GH}^{gen})$, соединяющая X и Y .

3.2 Когда GH -расстояние строго внутреннее?

Начнем с результата из [32, 33], утверждающего, что классическое расстояние Громова–Хаусдорфа, ограниченное на пространство Хаусдорфа $\mathcal{M}$ является строго внутренней метрикой.

Соглашение 3.7. На протяжении этого раздела, для каждого конечного семейства $\{X_i\}_{i=1}^n$ метрических пространств, говоря про метрическое пространство $\prod_{i=1}^n X_i$, мы всегда будем считать, что на нем задано расстояние

$$|(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)| = \max_i \{|x_i y_i|\},$$

которое, в частности, порождает расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{P}_0(X_1 \times X_2)$. Тем самым, пространство $\mathcal{P}_0(X_1 \times X_2)$ и все его подпространства (например, $\mathcal{R}(X_1, X_2)$) будут рассматриваться с функциями расстояния из $\mathcal{P}_0(X_1 \times X_2)$.

Мы воспользуемся следствием 1.20, в соответствии с которым при изучении расстояния Громова–Хаусдорфа достаточно рассматривать в $\mathcal{R}(X, Y)$ только замкнутые соответствия, множество которых мы обозначили $\overline{\mathcal{R}}(X, Y)$. Заметим, что $\overline{\mathcal{R}}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X \times Y)$, где $\mathcal{C}(X \times Y)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств в $X \times Y$, также наделенное расстоянием Хаусдорфа. При этом, в силу предложения 1.6, расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{C}(X \times Y)$ является обобщенной метрикой. Если пространства X и Y компактны, то пространство $\mathcal{C}(X \times Y)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}(X \times Y)$ всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств $X \times Y$, так что, в силу предложения 1.7, ограничение расстояния Хаусдорфа на пространство $\mathcal{H}(X \times Y)$ — метрика, а по теореме 1.10 само это пространство компактно.

Предложение 3.8. Для $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $\overline{\mathcal{R}}(X, Y)$ замкнуто в $\mathcal{H}(X \times Y)$ и, поэтому, $\overline{\mathcal{R}}(X, Y) \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\sigma \in \mathcal{H}(X \times Y) \setminus \overline{\mathcal{R}}(X, Y)$ существует окрестность U , не пересекающая $\overline{\mathcal{R}}(X, Y)$. Так как σ — замкнутое подмножество $X \times Y$, но $\sigma \notin \overline{\mathcal{R}}(X, Y)$, то σ не является соответствием, поэтому или $\pi_X(\sigma) \neq X$, или $\pi_Y(\sigma) \neq Y$, где $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ — канонические проекции. Пусть, для определенности, выполняется первое условие, т.е. существует $x \in X \setminus \pi_X(\sigma)$. Так как множество σ замкнуто в компакте $X \times Y$, оно является компактом, поэтому $\pi_X(\sigma)$ компактно в X и, значит, замкнуто в нем. Следовательно, существует открытый шар $U_\varepsilon^X(x) \subset X$ такой, что $U_\varepsilon^X(x) \cap \pi_X(\sigma) = \emptyset$. Из сказанного вытекает, что в качестве U можно взять $U_\varepsilon^X(x) \times Y$. Аналогично разбирается оставшийся случай, когда выполняется второе условие. $\square$

Определим функцию $f: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f(x, y, x', y') = ||xx'| - |yy' ||$. Ясно, что f непрерывна. Отметим, что для каждого $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ имеем

$$\text{dis } \sigma = \sup \{f(x, y, x', y') : (x, y), (x', y') \in \sigma\} = \sup f|_{\sigma \times \sigma}.$$

Предложение 3.9. Если $X, Y \in \mathcal{M}$, то функция $\text{dis}: \mathcal{H}(X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Доказательство. Выберем произвольное $\sigma \in \mathcal{H}(X \times Y)$ и покажем, что dis непрерывна в σ . Так как $(X \times Y) \times (X \times Y)$ — компакт, то определенная выше функция f равномерно непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\xi := (u, v, u', v') \in X \times Y$ и $\eta := (x, y, x', y') \in X \times Y$ удовлетворяют $|\xi\eta| < \delta$, то $f(\xi) < f(\eta) + \varepsilon$. Пусть $\sigma' \in \mathcal{H}(X \times Y)$ такое, что $d_H(\sigma, \sigma') < \delta$. Тогда для каждого $\xi \in \sigma' \times \sigma'$ существует $\eta \in \sigma \times \sigma$, для которых $|\xi\eta| < \delta$ и, значит, $f(\xi) < f(\eta) + \varepsilon$, откуда $\text{dis } \sigma' = \sup f|_{\sigma' \times \sigma'} \leq \sup f|_{\sigma \times \sigma} + \varepsilon = \text{dis } \sigma + \varepsilon$. Меняя местами σ и σ' , получаем, что $|\text{dis } \sigma - \text{dis } \sigma'| \leq \varepsilon$, а это означает непрерывность отображения dis в σ . $\square$

Определение 3.10. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$. Положим $\overline{\mathcal{R}}_{\text{opt}}(X, Y) = \mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y) \cap \overline{\mathcal{R}}(X, Y)$.

Теорема 3.11. Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\overline{\mathcal{R}}_{\text{opt}}(X, Y) \neq \emptyset$. Иными словами, для таких X и Y существует соответствие $R \in \overline{\mathcal{R}}(X, Y)$, для которого $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$.

Доказательство. По предложению 3.9, функция $\text{dis}: \overline{\mathcal{R}}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а по предложению 3.8 пространство $\overline{\mathcal{R}}(X, Y)$ компактно, поэтому dis достигает своего наименьшего значения, половина которого, в силу 1.20, равна $d_{GH}(X, Y)$. Следовательно, соответствие R , на котором это наименьшее значение достигается, — оптимальное. $\square$

Следствие 3.12. Для $X, Y \in \mathcal{M}$ условия $d_{GH}(X, Y) = 0$ и $X \approx Y$ эквивалентны.

Доказательство. То, что изометричность пространств X и Y влечет $d_{GH}(X, Y) = 0$, обсуждалось в примере 1.12. Обратное утверждение вытекает из теоремы 3.11 и предложения 1.16. $\square$

Определение 3.13. Пусть X — произвольное обобщенное псевдометрическое пространство с функцией расстояния d . Если для любых двух точек $x, y \in X$, находящихся на конечном расстоянии, существует кратчайшая геодезическая γ в X , соединяющая x и y , причем длина $|\gamma|$ этой кривой равна $|xy|$, то такая d называется *строго внутренней*, а пространство X — *геодезическим*.

Следствие 3.14. Метрическое пространство (M, d_{GH}) — геодезическое, т.е. ограничение расстояния Громова–Хаусдорфа на пространство M — строго внутренняя метрика.

Обозначим $\mathcal{GH}^{gen}$ собственный класс всех метрических пространств $\mathcal{GH}$, наделенный расстоянием d_{GH}^{gen} . Подклассы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathcal{GH}$, наделенные ограничением d_{GH}^{gen} , обозначим $\mathcal{M}^{gen}$ и $\mathcal{B}^{gen}$ соответственно.

Из следствий 2.7, 2.17 и 3.14 получаем

Следствие 3.15. Метрические пространства $\mathcal{M}^{us}$ и $\mathcal{M}^{ls}$ — геодезические.

3.3 Полнота класса $(\mathcal{GH}, d_{GH})$

Цель этого подраздела — доказать полноту класса $\mathcal{GH}$, наделенного классическим расстоянием Громова–Хаусдорфа d_{GH} .

Теорема 3.16. Класс Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$ является полным. В частности, полными являются все облака.

Доказательство. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — фундаментальная последовательность. Без ограничения общности, будем считать, что $2d_{GH}(X_n, X_{n+1}) \leq 1/2^n$. Для каждого n выберем соответствие $R_n \in \mathcal{R}(X_n, X_{n+1})$ такое, что $\text{dis } R_n < 1/2^n$. Положим $\bar{X} = \sqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и для каждого $x_1 \in X_1$ последовательность $x_1, x_2, \dots \in \bar{X}$ назовем *нитью с началом в x_1* , если для каждого $n \geq 1$ выполняется $x_{n+1} \in R_n(x_1)$. Множество всех таких нитей обозначим $N(\bar{X})$. Для нитей $\nu = (x_1, x_2, \dots)$ и $\nu' = (x'_1, x'_2, \dots)$ рассмотрим последовательность чисел $|x_1 x'_1|, |x_2 x'_2|, \dots$. Так как $\text{dis } R_n < 1/2^n$, то $||x_n x'_n| - |x_{n+1} x'_{n+1}|| < 1/2^n$, откуда для любого $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} ||x_n x'_n| - |x_{n+m} x'_{n+m}|| &= ||x_n x'_n| - |x_{n+1} x'_{n+1}| + |x_{n+1} x'_{n+1}| - \dots - |x_{n+m} x'_{n+m}|| \\ &\leq \sum_{k=1}^m ||x_{n+k-1} x'_{n+k-1}| - |x_{n+k} x'_{n+k}|| < \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{n+k-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

поэтому последовательность чисел $|x_1 x'_1|, |x_2 x'_2|, \dots$ фундаментальна и, значит, существует предел, который мы обозначим $|\nu \nu'|$. Ясно, что эти пределы задают на $N(\bar{X})$ функцию расстояния. Так как для любых трех нитей $\nu = (x_1, x_2, \dots)$, $\nu' = (x'_1, x'_2, \dots)$ и $\nu'' = (x''_1, x''_2, \dots)$ при каждом n на расстояние между точками x_n, x'_n, x''_n выполняются неравенства треугольника, то же самое верно и для введенного расстояния на ν, ν' и ν'' . Таким образом, мы определили на $N(\bar{X})$ псевдометрику. Профакторизовав полученное псевдометрическое пространство по отношению эквивалентности, заданному нулевыми расстояниями, мы получим метрическое пространство, которое обозначим X . Для нити $\nu \in N(\bar{X})$ класс этой эквивалентности, содержащий ν , обозначим $[\nu]$.

Для каждого n определим отношение $R'_n \subset X \times X_n$ так: для каждого x рассмотрим все нити $\nu = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in x$ и отнесем к R'_n все (x, x_n) . Так как каждый x_n входит в некоторую нить, то $R'_n \in \mathcal{R}(X, X_n)$. Оценим искажение соответствия R'_n .

Выбираем произвольные $x, x' \in X$, нити $\nu = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in x$ и $\nu' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots) \in x'$, тогда $|xx'| = |\nu\nu'| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k x'_k|$, и как было показано выше, $||x_n x'_n| - |x_{n+m} x'_{n+m}|| < 1/2^{n-1}$, откуда $||x_n x'_n| - |xx'| | \leq 1/2^{n-1}$. Таким образом, $\text{dis } R'_n \leq 1/2^{n-1}$, так что $X_n \xrightarrow{\mathcal{GH}} X$. $\square$

Из следствия 2.17 вытекает

Следствие 3.17. *Класс $\mathcal{GH}^{ls}$ — полный.*

Следствие 3.18. *Пространство $\mathcal{M}$ — полное.*

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.19. *Предположим, что последовательность $Z_1, Z_2, \dots$ непустых компактных метрических пространств сходится относительно d_{GH} к метрическому пространству Z . Тогда оно — вполне ограничено.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое Z_n , что $d_{GH}(Z_n, Z) < \varepsilon/2$, а в Z_n выберем конечную $(\varepsilon/2)$ -сеть Y_n . Пусть $R \in \mathcal{R}(Z_n, Z)$ такое, что $\text{dis } R < \varepsilon/2$. Для каждой точки $y_n \in Y_n$ выберем в $R(y_n)$ произвольную точку y , и множество так выбранных точек обозначим Y . Тогда Y — конечное подмножество Z . Далее, так как R сюръективно, для каждой точки $z \in Z$ существует $z_n \in Z_n$ такое, что $z \in R(z_n)$. Так как Y_n является $(\varepsilon/2)$ -сетью в Z_n , существует $y_n \in Y_n$, для которой $|z_n y_n| < \varepsilon/2$. Так как $\text{dis } R < \varepsilon/2$, то $|y z| < \varepsilon$ и, значит, Y является ε -сетью в Z , что и доказывает полную ограниченность Z в силу произвольности ε . $\square$

Из теоремы 3.16 и леммы 3.19 вытекает, что фундаментальная последовательность $Z_1, Z_2, \dots$ в $\mathcal{M}$ сходится относительно d_{GH} к некоторому вполне ограниченному метрическому пространству Z . Если $\bar{Z}$ — пополнение Z , тогда $\bar{Z} \in \mathcal{M}$ и $d_{GH}(Z, \bar{Z}) = 0$, так как Z всюду плотно в $\bar{Z}$. Из неравенства треугольника заключаем, что $Z_n \rightarrow \bar{Z}$, что и требовалось. $\square$

Из следствий 3.18, 2.7 и 2.17 получаем

Следствие 3.20. *Пространства $\mathcal{M}^{us}$ и $\mathcal{M}^{ls}$ — полные.*

3.4 Неполнота классов $\mathcal{M}^c$ и $\mathcal{GH}^c$

Теорема 3.21. *Метрическое пространство $\mathcal{M}^c$ не является полным.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $X_n = \{i/n\}_{i=0}^n$ подмножеств отрезка $[0, 1]$ с индуцированным расстоянием. Так как на конечных метрических пространствах непрерывное и обычное GH -расстояния совпадают (предложение 1.39), эта последовательность фундаментальна в $\mathcal{M}^c$. Предположим, что $X_n \xrightarrow{d_{GH}^c} X$, тогда $X_n \xrightarrow{d_{GH}} X$, и так как $\mathcal{M}$ — метрическое пространство, предел определен однозначно, поэтому $X = [0, 1]$.

С другой стороны, если $f: X \rightarrow X_n$ — непрерывное отображение, то f — константа (в силу связности отрезка $[0, 1]$), поэтому $\text{dis } f \geq 1$, откуда $d_{GH}^c(X, X_n) \geq 1/2$, поэтому последовательность X_n не сходится к X в $\mathcal{M}^c$. $\square$

Замечание 3.22. Отметим, что для $X = [0, 1]$ и $X_n = \{i/n\}_{i=0}^n$, рассмотренных в предыдущей теореме, имеет место и неравенство $d_{GH}^c(X, X_n) \leq 1/2$, которое вытекает из предложения 1.39. Поэтому, в действительности, $d_{GH}^c(X, X_n) = 1/2$.

Справедливость доказанной теоремы обусловлена тем, что мы ограничили класс метрических пространств (компактами), в котором ищем предел заданной фундаментальной последовательности. Однако в классе всех метрических пространств эта последовательность имеет предел, например, множество всех рациональных точек отрезка. Построим фундаментальную последовательность, для которой никакое метрическое пространство не является ее пределом относительно d_{GH}^c .

Нам понадобятся вспомогательные технические оценки.

Лемма 3.23. *Пусть X, Y — метрические пространства, $A \subset X$ — непустое подмножество, и $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. Предположим, что $\text{diam } A < \infty$ или $\text{diam } f(A) < \infty$. Тогда*

$$\text{dis } f \geq |\text{diam } f(A) - \text{diam } A|.$$

Доказательство. Отождествляя отображение f с графиком и полагая $g = f \cap (A \times f(A))$, заключаем из предложения 1.14, что $\text{dis } f \geq \text{dis } g$. С другой стороны, $g \in \mathcal{R}(A, f(A))$, поэтому, в силу теоремы 1.17 и предложения 1.39,

$$\text{dis } g \geq 2d_{GH}(A, f(A)) \geq |\text{diam } f(A) - \text{diam } A|,$$

что и требовалось. $\square$

Полученное неравенство является усилением свойства (3) предложения 1.39.

Лемма 3.24. Пусть X , Y и Z — метрические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ — произвольные отображения. Тогда для любой точки $y_0 \in Y$ справедливо неравенство $\text{codis}(f, g) \geq |y_0 f(X)|$.

Доказательство. Возьмем точку $x = g(y_0) \in X$. Тогда

$$\text{codis}(f, g) \geq |f(x) y_0| - |x g(y_0)| = |f(x) y_0| \geq |y_0 f(X)|,$$

что и требовалось. $\square$

Пример 3.25. Рассмотрим на плоскости отрезки $J = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$, $I = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ и $I_n = \{(x, 0) : \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $X = J \cup I$ и зададим последовательность пространств $X_n = J \cup I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для простоты рассуждений на $X = J \cup I$ возьмем внутреннюю метрику, а на его подмножествах — метрику, индуцированную этой внутренней метрикой.

Теорема 3.26. Последовательность пространств X_n является фундаментальной в метрике d_{GH}^c , но никакое метрическое пространство не может быть её пределом в этой метрике.

Доказательство. Для $m \geq n$ обозначим $h: I_n \rightarrow I_m$ линейное отображение, переводящее $1/n$ в $1/m$, а 1 в 1. Непосредственное вычисление показывает, что $\text{dis } h = \frac{m-n}{mn}$. Пусть $H: X_n \rightarrow X_m$ получается продолжением h до тождественного отображения на J , тогда $\text{dis } H = \frac{m-n}{mn}$. Так как H — гомеоморфизм, то $H \in \mathcal{R}_c(X_n, X_m)$, поэтому

$$d_{GH}^c(X_n, X_m) \leq \frac{1}{2} \text{dis } H = \frac{m-n}{2mn} < \frac{1}{2n}.$$

Следовательно, последовательность компактных метрических пространств X_n является фундаментальной в метрике d_{GH}^c . Отметим, что $d_{GH}(X, X_n) \leq d_H(X, X_n) = \frac{1}{2n}$, поэтому последовательность X_n сходится к X в метрике d_{GH} .

Предположим, что у последовательности X_n имеется предел X_∞ в метрике d_{GH}^c . Из неравенства $d_{GH} \leq d_{GH}^c$ следует, что пространство X_∞ также является пределом последовательности X_n в метрике d_{GH} , поэтому $d_{GH}(X, X_\infty) = 0$. Из леммы 3.19 вытекает, что пополнение X_∞ является метрическим компактом, поэтому, в силу следствия 3.12, это пополнение изометрично X . Так как каждое метрическое пространство всюду плотно в своем пополнении, пространство X_∞ изометрично всюду плотному подмножеству в X .

Лемма 3.27. Имеем $\{(0, -1), (0, 1), (1, 0)\} \cup X_\infty = X$. В частности, пространство X_∞ связно.

Доказательство. Включение левого множества в правое очевидно. Докажем обратное включение. Предположим противное, т.е. что $(x_0, y_0) \in X \setminus (\{(0, -1), (0, 1), (1, 0)\} \cup X_\infty)$.

Пусть сначала $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, тогда расстояние r от (x_0, y_0) до одной из точек $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ меньше 1. Обозначим эту точку P , и пусть K — отрезок между (x_0, y_0) и P . Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $r + \varepsilon < 1$ и $\varepsilon \leq r$. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что при $n \geq n_0$ диаметры всех связных компонент пространства X_n больше $r + \varepsilon$, а $2d_{GH}^c(X_\infty, X_n) < \varepsilon/2$. Но тогда существуют непрерывные $f: X_n \rightarrow X_\infty$ и $g: X_\infty \rightarrow X$, для которых $\text{dis } f < \varepsilon/2$, $\text{dis } g < \varepsilon/2$ и $\text{codis}(f, g) < \varepsilon/2$.

Так как f непрерывно, то каждое $f(I_n)$ и $f(J)$ содержится в некоторой связной компоненте пространства X_n . Если одно из них пересекло K , то оно целиком попало в K , поэтому, в силу леммы 3.23 выполняется $\text{dis } f \geq \varepsilon$, противоречие. Если же ни одно из них не попало в K , то согласно лемме 3.24 имеем $\text{codis}(f, g) \geq |P f(X_n)| \geq r \geq \varepsilon$, противоречие.

Пусть теперь $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Снова выберем f и g как выше. Но теперь диаметры всех компонент связности пространства X_∞ не превосходят 1, однако в каждом X_n есть компонента диаметра 2, поэтому по лемме 3.23 имеем $\text{dis } f \geq 1$, противоречие. $\square$

Таким образом, для всякого непрерывного отображения $g: X_\infty \rightarrow X_n$ связное множество $g(X_\infty)$ не пересекает одну из связных компонент пространства X_n . Но тогда по лемме 3.24 имеем $\text{codis}(f, g) \geq 1 - 1/n$ для любого отображения $f: X_n \rightarrow X_\infty$, противоречие, которое и завершает доказательство теоремы. $\square$

Тема 4

Основы теории категорий

«Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями,
лучший математик — тот, кто устанавливает аналогии доказательств,
более сильный математик — тот, кто замечает аналогии теорий;
но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии».

Стефан Банах

4.1 Определение категории.

Для оригинального определения расстояния Громова–Хаусдорфа нужно понятие расстояния Хаусдорфа. Расстояние Хаусдорфа определено для (произвольных, замкнутых, компактных, связных) подмножеств заданного обобщенного (псевдо)метрического пространства X . Это автоматически приводит к возможности построения (рассмотрения) множества (всех, замкнутых, компактных, связных) подмножеств X , которое будучи наделенным расстоянием Хаусдорфа, превращается из множества в метрическое (топологическое) пространство. Это пространство (множество) называется **гиперпространством** (гипермножеством) X . Переход от пространства к его гиперпространству является конкретным примером перехода от пространства X к пространству $F(X)$ некоторых структур на X . Многие из таких переходов обладают некоторыми общими свойствами. Именно к общему взгляду на такие переходы мы сейчас обратимся.

Подчеркнем, что и второе определение расстояния Громова–Хаусдорфа через соответствия, т.е. через многозначные отображения, удобнее рассматривать в рамках такого общего подхода. Именно, всякое (многозначное) отображение полезно рассматривать не изолированно само по себе, а как элемент пространства (множества) отображений. При этом важен и другой переход — от многозначного отображения к однозначному отображению в гиперпространство, при котором разные понятия непрерывности многозначного отображения соответствуют разным топологиям на гиперпространстве. Пример перехода от пространства к пространству отображений мы также рассмотрим ниже очень детально.

Кроме того, другие переходы от метрического пространства X к новому объекту $F(X)$ иногда позволяют делать некоторые выводы о первоначальной метрике на X .

Главное же заключается в том, что первоначально казалось, что переход от вполне регулярного пространства X к метрическому пространству $\mathcal{PM}(X)$ всех непрерывных (ограниченных) псевдометрик на X позволит определить аналог расстояния Громова–Хаусдорфа между двумя произвольными вполне регулярными пространствами. Сейчас представляется, что это невозможно, по крайней мере в достаточно узких границах предполагавшегося подхода.

В любом случае, любой функтор заданной категории $\mathcal{K}$ в метрическую категорию $\mathcal{Metr}$ с помощью любого аналога расстояния Громова–Хаусдорфа d_{GH} между метрическими пространствами позволяет определить расстояние между любыми двумя объектами категории $\mathcal{K}$.

Основное здание математического знания опирается на понятия “множество” и “отображение”. Далее на множества “навешиваются” дополнительные структуры, а от отображений требуется некоторая согласованность с этой структурой. Но у почти всех этих уточнений–ответвлений в основе есть некоторое общее ядро, которое не зависит от характера структуры, а само может рассматриваться чисто аксиоматически как своя структура, моделирующая общее содержание понятий–свойств различных структур на множествах.

Этот общий подход к различным ветвям математики называется “Теорией категорий и функторов” и был введен в математику топологами–алгебраистами С. Эйленбергом и С. Маклейном в 1944 году, в связи с проблемой аксиоматизации теории групп гомологий и когомологий топологических пространств [36, 37]. С основными понятиями и конструкциями теории категорий можно познакомиться по [38, 39].

Будем говорить, что задана **категория** $\mathcal{K}$, если задан класс $\text{Ob } \mathcal{K}$ элементов, называемых **объектами**, причем

1. Для каждой (упорядоченной) пары объектов (X, Y) из $\mathcal{K}$ задано множество $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$, называемое множеством **морфизмов** X в Y . Вместо $f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ обычно пишут $f: X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$ и говорят об отображении X в Y .

2. Для каждой тройки объектов (X, Y, Z) из $\mathcal{K}$ задано отображение

$$\Sigma: \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Z).$$

$\Sigma(f, g)$ называется **композицией** морфизмов f и g и обозначается $g \circ f$ или gf .

3. Множества $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ и композиция морфизмов удовлетворяют следующим аксиомам:

(α) композиция ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} V$

$$h(gf) = (hg)f;$$

(β) для каждого объекта X из $\mathcal{K}$ существует морфизм $1_X = \text{Id}_X: X \rightarrow X$, называемый **тождественным морфизмом** или **единицей** объекта X , такой, что $f1_X = f$ и $1_Y g = g$ для любых морфизмов $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} X$;

(γ) если пары объектов (X, Y) , (X', Y') различны, то пересечение множеств $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X', Y')$ пусто.

По всякой категории $\mathcal{K}$ строится дуальная категория $\mathcal{K}^*$, объектами которой являются объекты первоначальной категории, а $\text{Hom}_{\mathcal{K}^*}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, X)$ со “старой” операцией композиции.

Легко видеть, что $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}$.

Возможность ассоциировать с каждой категорией $\mathcal{K}$ дуальную категорию $\mathcal{K}^*$ позволяет дуализировать каждое понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathcal{K}$, сопоставляя ему дуальное понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathcal{K}^*$ (получающееся путем “обращения стрелок”).

Подкатегорией категории $\mathcal{K}$ называют категорию $\mathcal{K}'$, удовлетворяющую следующим условиям:

(I) $\text{Ob } \mathcal{K}' \subset \text{Ob } \mathcal{K}$;

(II) $\text{Hom}_{\mathcal{K}'}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$;

(III) композиция морфизмов в $\mathcal{K}'$ индуцируется их композицией в $\mathcal{K}$;

(IV) все тождественные морфизмы из $\mathcal{K}'$ – тождественные морфизмы в $\mathcal{K}$.

Подкатегория $\mathcal{K}'$ категории $\mathcal{K}$ называется **полной**, если

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$$

для каждой пары объектов $X, Y \in \mathcal{K}'$.

4.2 Примеры категорий.

1. Категория $\mathcal{E}ns$ множеств. Объекты этой категории – множества. Для любых двух множеств X, Y под $\text{Hom}_{\mathcal{E}ns}(X, Y)$ понимается множество всех отображений X в Y , а под композицией обычная композиция отображений.

В категории множеств всякий морфизм $f: X \rightarrow Y$ естественно отождествить с точкой в декартовой степени Y^X . При этом запись Y^X предпочтительнее записи $Y^{|X|}$ так как в первой записи не возникает проблемы различения индексов координат точки в степени множества X .

2. Категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств. Объекты этой категории – топологические пространства. Для любых двух топологических пространств (X, τ_X) , (Y, τ_Y) под $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ понимается множество всех

непрерывных отображений X в Y , т.е. таких отображений $f: X \rightarrow Y$, что $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Под композицией понимается обычная композиция отображений (из категории множеств).

Категория множеств $\mathcal{Ens}$ является полной подкатегорией топологических пространств. На всяком множестве нужно ввести дискретную топологию и тогда всякое отображение является непрерывным.

На всяком топологическом пространстве можно забыть топологию. В общем случае не всякое отображение получается из непрерывного, поэтому не может быть речи о полной подкатегории. Кроме того, тут остается неясным вопрос: не плохо ли, что разным топологическим пространствам при этом может соответствовать “одно и то же” множество?

В категории $\mathcal{Top}$ выделяются полные подкатегории различных классов пространств – хаусдорфовых, регулярных, вполне регулярных, нормальных, слабо паракомпактных (в любое открытое покрытие можно вписать конечно конечное открытое покрытие), паракомпактных (в любое открытое покрытие можно вписать локально конечно открытое (замкнутое, произвольное) покрытие), сильно паракомпактных (в любое открытое покрытие можно вписать звездно конечно открытое покрытие), счетно паракомпактных (в любое счетное открытое покрытие можно вписать локально конечно открытое покрытие), финально компактных [линделёфовых] (из любого открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие), компактных, метризуемых, сепарабельных метризуемых, компактных метризуемых.

3. Категория $\mathcal{Metr}$ метрических пространств. Объекты этой категории – метрические пространства. Для любых двух метрических пространств $(X, \varrho_X), (Y, \varrho_Y)$ под $\text{Hom}_{\mathcal{Metr}}(X, Y)$ понимается множество всех нерастягивающих отображений X в Y , а под композицией обычная композиция отображений.

Категория множеств $\mathcal{Ens}$ является полной подкатегорией метрических пространств. На всяком множестве расстояние между любыми разными точками нужно положить равным 1 и тогда всякое отображение является нерастягивающим.

На всяком метрическом пространстве можно забыть метрику. В общем случае не всякое отображение получается из нерастягивающего, поэтому не может быть речи о полной подкатегории. Кроме того, тут также остается неясным вопрос: не плохо ли, что разным метрическим пространствам при этом может соответствовать “одно и то же” множество?

Всякая (псевдо)метрика ϱ на множестве X задает на этом множестве топологию τ_ϱ . Но во-первых, разные метрики могут задавать “одну и ту же” топологию, поэтому остается туманным вопрос: как воспринимать возникающие топологические пространства – как совпадающие или как разные? При первом выборе надо скорее говорить не о подкатегории а о функторе (смотри далее), а при втором выборе возникает неограниченная совокупность (даже не множество) “одного и того же” множества. Во-вторых, не всякое непрерывное отображение рождается из нерастягивающего отображения и, более того, разные метрики задают разные множества непрерывных отображений, рождающихся из нерастягивающих отображений.

Две метрики на одном множестве X будем считать *эквивалентными*, если они задают одну и ту же топологию. Для топологического пространства (X, τ) метрика ϱ на множестве X называется *допустимой*, если $\tau_\varrho = \tau$, т.е. если тождественное отображение $\text{Id}_X: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_\varrho)$ является гомеоморфизмом. Псевдометрика ϱ на множестве X называется *непрерывной*, если $\tau_\varrho \subset \tau$, т.е. если тождественное отображение $\text{Id}_X: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_\varrho)$ непрерывно.

4. Категория $\mathcal{Lips}$ – липшицева категория. Объекты этой категории – метрические пространства. В качестве морфизмов берется множество всех липшицевых отображений, т.е. таких отображений $f: X \rightarrow Y$, для которых существует такая константа $L_f < \infty$, что

$$|f(x_1)f(x_2)|_Y \leq L_f |x_1x_2|_X \text{ для любых двух точек } x_1, x_2 \in X. \quad (1)$$

В этой записи (в этих обозначениях) предполагается, что в качестве числа L_f берется инфимум, который является и минимумом, тех чисел, для которых справедливо (1).

Так как при $l = 0$

$$|f(x_1)f(x_2)|_Y \geq l |x_1x_2|_X \text{ для любых двух точек } x_1, x_2 \in X, \quad (2)$$

то определена нижняя константа Липшица $l_f \geq 0$, для которой справедливо (2) – это супремум и максимум констант, для которых справедливо (2).

Билипшицев изоморфизм это такая биекция f , что $0 < l_f$ и $L_f < \infty$. Легко проверить, что тогда $l_{f^{-1}} = (L_f)^{-1}$ и $L_{f^{-1}} = (l_f)^{-1}$.

Категория $\mathcal{Metr}$ является не полной подкатегорией $\mathcal{Lips}$.

С учетом вышесказанного категорию $\mathcal{Lips}$ можно считать не полной подкатегорией $\mathcal{Top}$.

5. Категория $\mathcal{Uni}$ – равномерная категория. Объекты этой категории – равномерные (метрические) пространства.

Имеются разные (эквивалентные) определения равномерности на множестве X – через симметричные надмножества диагонали Δ в квадрате X^2 , называемые **окружениями диагонали**; через покрытия множества X .

В качестве морфизмов берется множество всех равномерных отображений, т.е. таких отображений $f: X \rightarrow Y$, что прообраз $f^{-1}(\lambda) = \{f^{-1}(U_\alpha)\}$ всякого равномерного покрытия $\lambda = \{U_\alpha\}$ пространства Y является равномерным покрытием пространства X .

Всякое метрическое пространство имеет метрическую равномерность, в которую входят все покрытия $\lambda = \{U_\alpha\}$, обладающие числом Лебега, т.е. такие покрытия, для которых существует такое число $\varepsilon_\lambda > 0$, что для всякой точки $x \in X$ имеется такой элемент U_α покрытия, что $x \in O(x, \varepsilon_\lambda) \subset U_\alpha$, т.е. если покрытие $\lambda_\varepsilon = \{O(x, \varepsilon): x \in X\}$ вписано в данное покрытие λ .

Всякая топологическая группа имеет три групповые равномерности – $\lambda_l(H) = \{xH: x \in X\}$ (левая), $\lambda_r(H) = \{Hx: x \in X\}$ (правая), $\lambda(H) = \{xHy: x, y \in X\}$, где H пробегает все окрестности единичного элемента.

Всякое вполне регулярное пространство обладает максимальной равномерностью.

На всяком компактном хаусдорфовом пространстве имеется ровно одна равномерность.

6. Категория *Man* многообразий. Объекты этой категории – многообразия. В качестве морфизмов берется множество всех гладких отображений.

Гладкая топология является необъятным океаном; каждый может по своему вкусу взять подходящую точно определенную категорию многообразий.

7. Категория *Top₀* отмеченных топологических пространств. Объекты этой категории – топологические пространства с выделенной точкой (X, x_0) , $x_0 \in X$. Для отмеченных топологических пространств (X, x_0) , (Y, y_0) под $\text{Hom}_{\text{Top}_0}((X, x_0), (Y, y_0))$ понимается множество всех таких непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$, что $f(x_0) = y_0$.

8. При замене точки на подмножество получается категория *Top²* пар пространств (X, A) , где $A \subset X$. $\text{Hom}_{\text{Top}^2}((X, A), (Y, B)) = \{f \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y): f(A) \subset B\}$.

9. Категория *Hom* – гомотопическая категория, которую мы опишем далее.

10. Категория *Hom₀* – гомотопическая категория отмеченных топологических пространств, которую мы также опишем далее.

11. Категория *Shape* – шейповая категория, которую мы опишем далее.

12. Категория *Shape₀* – шейповая категория отмеченных топологических пространств, которую мы также опишем далее.

13. Категория *G* групп. Объекты этой категории – группы. Для любых двух групп $(X, \times_X)$, $(Y, \times_Y)$ под $\text{Hom}_G(X, Y)$ понимается множество всех гомоморфизмов X в Y , а под композицией обычная композиция отображений.

14. Категория *Ab* абелевых групп. Объекты этой категории – абелевы группы.

Категория *Ab* является полной подкатегорией *G*.

15. Категория *V_F* векторных пространств. Объекты этой категории – векторные пространства над полем F . Под $\text{Hom}_{V_F}(X, Y)$ понимается множество всех линейных отображений X в Y .

16. Категория *B* пространств Банаха.

Категория *B* является не полной подкатегорией *V_R*.

17. Категория *POder* (частично) упорядоченных множеств. Объекты этой категории – частично упорядоченные множества. Под $\text{Hom}_{\text{POder}}(X, Y)$ понимается множество всех сохраняющих порядок отображений X в Y .

18. Категория *Lat* решеток. Объекты этой категории – решетки. Под решеткой понимается множество X с двумя бинарными коммутативными и ассоциативными операциями $\vee$ (аналог максимума и объединения) и $\wedge$ (аналог минимума и пересечения), которые удовлетворяют аксиомам (**законам поглощения**)

$$x \vee (x \wedge y) = x,$$

$$x \wedge (x \vee y) = x.$$

Отсюда вытекают (**законы идемпотентности**)

$$x \vee x = x,$$

$$x \wedge x = x.$$

Под $\text{Hom}_{\text{Lattice}}(X, Y)$ понимается множество всех сохраняющих операции отображений X в Y .

19. По всякой категории K строится категория морфизмов *Mor_K*. Объекты этой категории – морфизмы $f: X \rightarrow Y$ категории K . Морфизмом f в $g: T \rightarrow Z$ называется пара морфизмов первоначальной категории

$h_1: X \rightarrow T$ и $h_2: Y \rightarrow Z$ таких, что $h_2 f = g h_1$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ T & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

20. По всякому объекту Z категории $\mathcal{K}$ строится категория морфизмов $Mor_{Z \in \mathcal{K}}$. Объекты этой категории – морфизмы $f: X \rightarrow Z$ категории $\mathcal{K}$. Морфизмом f в $g: Y \rightarrow Z$ называется морфизм первоначальной категории $h: X \rightarrow Y$ такой, что $f = gh$.

Категория морфизмов $Mor_{Z \in \mathcal{K}}$ является полной подкатегорией категории $Mor_{\mathcal{K}}$ – нужно положить $h_2 = 1_Z$.

Объект $P \in \mathcal{K}$ называется **наименьшим**, если $|\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, P)| = 1$ для всякого объекта $X \in \mathcal{K}$. В категориях множеств и топологических пространств имеется наименьший объект – одноточечное множество. Поэтому наименьший объект мы будем обозначать $\{pt\}$. При существовании в категории наименьшего объекта $\{pt\}$ каждый объект $X \in \mathcal{K}$ можно отождествить с единственным имеющимся морфизмом $f_X: X \rightarrow \{pt\}$, который называется **постоянным отображением**. Таким образом первоначальная категория $\mathcal{K}$ отождествляется с категорией морфизмов в наименьший объект $Mor_{\{pt\} \in \mathcal{K}}$.

4.3 Простейшие понятия.

Многие классические понятия допускают чисто категорное определение.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется **изоморфизмом**, если существует такой морфизм $g: Y \rightarrow X$, что $g \circ f = 1_X$ и $f \circ g = 1_Y$. Легко видеть, что в этом определении морфизм g также является изоморфизмом.

В категории множеств изоморфизм это биекция.

В категории топологических пространств изоморфизм это гомеоморфизм, т.е. биекция, которая непрерывна в обе стороны.

Говорят, что объекты X и Y изоморфны (эквивалентны), если существует изоморфизм $f: X \rightarrow Y$. Обозначаем $X \cong Y$. Легко проверить, что отношение изоморфности $X \cong Y$ является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами

1 (рефлексивность) $X \cong X$;

2 (симметричность) $X \cong Y \implies Y \cong X$;

3 (транзитивность) $X \cong Y, Y \cong Z \implies X \cong Z$.

Поэтому корректно определены классы эквивалентности $K(X)$, которые обычно и считаются объектами первоначальной категории и отождествляются с любым своим представителем X . Отметим, что здесь еще нужна проверка корректности определения множества морфизмов и операции композиции.

Класс эквивалентности в категории множеств называется **кардиналом**, класс множества X называется **мощностью** X и обозначается через $|X|$.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется **мономорфизмом**, если для любых двух морфизмов $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ из $f g_1 = f g_2$ следует $g_1 = g_2$.

Всякий изоморфизм является мономорфизмом.

В категории множеств мономорфизм это инъекция, т.е. взаимно однозначное отображение.

В категории топологических пространств мономорфизм это непрерывное взаимно однозначное отображение.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется **эпиморфизмом**, если для любых двух морфизмов $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ из $g_1 f = g_2 f$ следует $g_1 = g_2$.

Всякий изоморфизм является эпиморфизмом.

В категории множеств эпиморфизм это сюръекция, т.е. отображение на.

В категории топологических пространств эпиморфизм это непрерывные отображения на плотное подмножество, т.е. на подмножество, замыканием которого является все пространство.

Для всякого морфизма $f: X \rightarrow Y$

$$f \text{ изоморфизм в категории } \mathcal{K} \iff f \text{ изоморфизм в категории } \mathcal{K}^*;$$

$$f \text{ мономорфизм в категории } \mathcal{K} \iff f \text{ эпиморфизм в категории } \mathcal{K}^*;$$

$$f \text{ мономорфизм в категории } \mathcal{K}^* \iff f \text{ эпиморфизм в категории } \mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}.$$

В категории множеств для всякого морфизма $f: X \rightarrow Y$

$$f \text{ изоморфизм} \iff f \text{ мономорфизм и эпиморфизм.} \quad (3)$$

В категории топологических пространств эквивалентность (3), вообще говоря, не имеет место. Однако на подкатегории компактных хаусдорфовых пространств она верна.

На множестве объектов любой категории следующим образом вводится частичный порядок. Мы пишем $Y \geq_{\mathcal{K}} X$, если существуют такие морфизмы $r: Y \rightarrow X$ и $i: X \rightarrow Y$, что $r \circ i = 1_X$.

Покажем, что в этом случае морфизм r является эпиморфизмом, а морфизм i является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть для двух морфизмов $g_1, g_2: X \rightarrow Z$ имеет место равенство $g_1 r = g_2 r$. Тогда $g_1 = g_1 1_X = g_1 (r i) = (g_1 r) i = (g_2 r) i = g_2 (r i) = g_2 1_X = g_2$. Аналогично, если для двух морфизмов $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ имеет место равенство $i g_1 = i g_2$, то $g_1 = 1_X g_1 = (r i) g_1 = r (i g_1) = r (i g_2) = (r i) g_2 = 1_X g_2 = g_2$. $\square$

В категории множеств условие $X \geq_{\mathcal{E}ns} Y$ записывают в виде $|X| \geq |Y|$ и говорят, что мощность (количество точек) Y не превосходит мощности X .

В категории хаусдорфовых топологических пространств отображение i является вложением на замкнутое множество $i(X) = \overline{i(X)} \subset Y$ (предложение 4.32). При отождествлении X и $i(X)$ отображение r называется ретракцией. Говорят также, что X является ретрактом Y .

Теорема 4.1 (Кантора–Бернштейна). *Для множеств X и Y следующие условия эквивалентны*

- (1) $|X| = |Y|$;
- (2) $X \geq_{\mathcal{E}ns} Y$ и $Y \geq_{\mathcal{E}ns} X$;
- (3) существуют мономорфизмы $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$.

4.4 Определение функтора.

Для категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ **ковариантный** (соответственно **контравариантный**) **функтор** F из категории $\mathcal{K}$ в $\mathcal{L}$ состоит из:

- (a) отображения $X \mapsto F(X)$, сопоставляющего каждому объекту X из $\mathcal{K}$ объект $F(X)$ из $\mathcal{L}$;
- (b) отображений

$$F(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}}(F(X), F(Y))$$

$$\text{соответственно } F(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}}(F(Y), F(X)),$$

определенных для всех пар (X, Y) объектов из $\mathcal{K}$ и таких, что (если вместо $F(X, Y)(f)$ просто писать $F(f)$), то $F(1_X) = 1_{F(X)}$ и $F(gf) = F(g)F(f)$ (соответственно $F(gf) = F(f)F(g)$).

4.5 Постановка общих задач.

Всякий функтор $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ по определению ставит в соответствие всякому объекту $X \in \mathcal{K}$ объект $F(X) \in \mathcal{L}$. Одна из основных задач приложения теории категорий к другим областям математики заключается в установлении условий при которых объект X однозначно восстанавливается по объекту $F(X)$.

Более точно, здесь возникают пять задач.

I. По схожести объектов X и Y (например по совпадению некоторых их инвариантов) получить схожесть объектов $F(X)$ и $F(Y)$.

II. По схожести объектов $F(X)$ и $F(Y)$ (например по их изоморфности или по совпадению некоторых их инвариантов) получить схожесть первоначальных объектов X и Y .

У задачи *II* есть тривиальное решение. Именно, по всякому функтору $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ и свойству (условию) $\mathcal{P}$, определенному в категории $\mathcal{L}$, в категории $\mathcal{K}$ легко определить свойство (условие) $F^{-1}(\mathcal{P})$, которое решает задачу *II*. Именно, будем считать, что объект $X \in \mathcal{K}$ обладает свойством (удовлетворяет условию) $F^{-1}(\mathcal{P})$ тогда и только тогда, когда объект $F(X) \in \mathcal{L}$ обладает свойством (удовлетворяет условию) $\mathcal{P}$. На самом деле здесь задача *II* просто принимает эквивалентную формулировку: описать свойство (условие) $F^{-1}(\mathcal{P})$ во внутренних терминах категории $\mathcal{K}$, т.е. без использования функтора F .

Именно этот способ применялся во введении к теории категорий в предложенном там определении расстояния Громова–Хаусдорфа между объектами без метрики.

Аналогичным образом можно предложить перенесение свойств (условий) из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$.

III. Какие свойства морфизма $u: X \rightarrow Y$ переходят в какие свойства морфизма $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$. И наоборот, из каких свойств морфизма $F(u)$ следуют какие свойства морфизма u ?

IV. Для морфизма $U: F(X) \rightarrow F(Y)$ (например изоморфизма или морфизма сохраняющего некоторую структуру) получить такой морфизм $u: X \rightarrow Y$, что $U = F(u)$. Важен вопрос исследования свойств отображения u , например его единственность.

V. Описать те объекты категории $\mathcal{L}$, которые имеют вид $F(X)$ для некоторого объекта $X \in \mathcal{K}$.

Процитируем работу В.В. Федорчука [40], которая посвящена исследованию конкретного свойства $\mathcal{P} = A(N)R$.

“Изучение абсолютных ретрактов и абсолютных окрестностных ретрактов (ANR -пространств) интересно не только с точки зрения возможности продолжения отображений, но и потому, что свойство быть $A(N)R$ -пространством лежит в основе некоторых других свойств, например свойства быть многообразием, конечномерным или бесконечномерным.

Важная роль класса $A(N)R$ -пространств в топологии объясняется не только хорошими их свойствами, но и тем, что этот класс достаточно широк. Свойство быть $A(N)R$ -пространством сохраняют многие топологические операции: суммирование, склейка, конус, произведение. Некоторые из этих операций носят функториальный характер. Это делает актуальной постановку следующей проблемы.

(А) *Какие ковариантные функторы в категории топологических пространств сохраняют свойство быть $A(N)R$ -пространством? ...*

(Б) *Как ведут себя те или иные геометрические свойства пространств при воздействии на них различными ковариантными функторами?*

Поскольку свойства топологического пространства можно рассматривать как свойства постоянного его отображения, проблему (Б) естественно расширить до проблемы

(В) *Как ведут себя те или иные свойства отображений при воздействии на них различными ковариантными функторами? ...*

(Г) *Как ведут себя геометрические свойства пространств и отображений при переходе от пространства X и отображения f к пространству $F(X)$ и отображению $F(f)$ соответственно (здесь F — ковариантный функтор)? В частности, пусть $\mathcal{P}$ — некоторое геометрическое свойство. Для каких функторов F из того, что X (соответственно f) обладает свойством $\mathcal{P}$, вытекает, что $F(X)$ (соответственно $F(f)$) обладает этим же свойством? Или наоборот, каковы геометрические свойства пространств и отображений, которые для данного функтора F переходят от $F(X)$ и $F(f)$ к X и f соответственно?”*

4.6 Степенные и экспоненциальные функторы.

Процитируем другую работу В.В. Федорчука [41].

“В последние годы изучение ковариантных функторов в категории компактов и в объемлющей ее категории бикомпактов становится все более и более популярным. Простейшим из таких функторов (вернее, целым набором функторов) является функтор Id^k k -й степени, где k — конечный или бесконечный кардинал. Этот функтор изучается уже более полувека (после знаменитой работы А.Н. Тихонова), хотя мало кто обращал внимание на функториальность произведения. Но при этом стоит отметить, что фактически они изучаются с момента выделения топологии в отдельную область математики. Еще более “древним” является функтор exr гиперпространства или экспоненты. Его появление связано с именами Хаусдорфа и Вьеториса. Более “молодыми” являются функторы exr_n n -й гиперсимметрической степени и функтор SP_G^n G -симметрической степени.

Совсем недавно наметилась тенденция к изучению общих свойств ковариантных функторов в категории бикомпактов. Заслуга в этом принадлежит Е.В. Щепину, который впервые доказал довольно общие и очень содержательные теоремы о функторах в категории бикомпактов. Он с помощью нескольких естественных свойств выделил понятие нормального функтора, которому, несомненно, принадлежит большое будущее.”

Желающие могут обратиться к обзору М.М. Заричного и В.В. Федорчука [42].

В ответ на вопрос А.О. Иванова уместно привести письмо А.Н. Карпова.

“К слову, возник вопрос о термине “бикомпактность”, точнее о смысле приставки “би”. В моей памяти отложилось, что “би” в данном случае означает одновременное наличие счетной компактности и финальной компактности. В “Мемуаре...” компактное пространство определяется как пространство, в котором каждое бесконечное

множество имеет предельную точку, т.е. то, что теперь мы называем счётной компактностью и что в метрическом случае было равносильно привычной современной компактности. При переходе от метрических пространств к топологическим, очевидно, возникла необходимость в усилении определения. Т.е. в переводе с языка “Мемуара..” на современный язык: “компактное пространство” - счётно компактное пространство, “компакт” - метрическое (или метризуемое) счётно компактное (а значит, и компактное) пространство, “бикompактное пространство” - компактное пространство, “бикompакт” - хаусдорфово компактное пространство. Т.е. “би” в данном случае не кажется взятым с потолка.”

В нашем курсе мы не будем отвлекаться на правильное определение нормального функтора, но нам понадобятся два его свойства, которые сейчас сформулируем.

Ковариантный функтор F в категории бикompактов называется **непрерывным**, если он коммутирует с пределами обратных спектров. Более точно это означает следующее: Для любого обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta: X_\beta \rightarrow X_\alpha, \alpha \leq \beta \in A\}$ определен обратный спектр

$$F(S) = \{F(X_\alpha), F(\pi_\alpha^\beta): F(X_\beta) \rightarrow F(X_\alpha), \alpha \leq \beta \in A\}.$$

Пусть

$$X = \varprojlim S \text{ и } \pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha - \text{сквозные проекции.}$$

Отображения $F(\pi_\alpha): F(X) \rightarrow F(X_\alpha)$ в пределе дают отображение из $F(X)$ в $\varprojlim F(S)$. Так вот, требование непрерывности состоит в том, чтобы это отображение было гомеоморфизмом, т.е. $F(\varprojlim S) = \varprojlim F(S)$.

Функтор F **сохраняет точку**, если из $|X| = 1$ следует $|F(X)| = 1$. Отсюда следует, что точку $x \in X$ можно отождествить с точкой $F(x) \in F(X)$. Из других условий на нормальный функтор следует, что для нормального функтора F на бикompактных пространствах отображение $T_X: X \rightarrow F(X)$, сопоставляющее точке $x \in X$ точку $F(x) \in F(X)$, является вложением. Впрочем, во всех рассматриваемых нами примерах легко непосредственно проверить, что отображение T_X является вложением.

1. В некоторых категориях определен объект X^2 , что задает функтор $F(X) = X^2$. К объекту X^2 можно подойти двумя разными путями.

Первый путь заключается в категорном определении декартова произведения объектов.

Второй путь заключается во взятии множества $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(D, X)$, где D означает “двухточечный” объект.

В категории множеств оба подхода определяют один объект – классический квадрат множества.

2. Если в произвольной категории $\mathcal{K}$ фиксировать один объект $Y \in \mathcal{K}$, то определены два функтора

$$X^Y = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, X) \text{ и } Y^X = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y).$$

Пока оба функтора в категорию множеств и первый ковариантен, а второй контравариантен.

Пример декартова произведения топологических пространств показывает, что в определении категории множества морфизмов можно наделять дополнительными структурами. В категории топологических пространств далее мы наделим множества морфизмов топологиями, причем разными.

Ясно, что для всякого конечного (и не только) кардинала $n \geq 1$ в некоторых случаях определен объект, который естественно понимать как X^n .

3. Мы уже построили для всякого (ограниченного) метрического пространства X [обобщенно] метрическое пространство 2^X всех непустых замкнутых подмножеств в метрике Хаусдорфа. Напомним необходимые понятия и обозначения. Как принято в геометрии расстояние между точками $x_1, x_2 \in (X, \varrho_X)$ часто обозначается $|x_1 x_2|$. **Расстоянием от точки $x \in X$ до множества $A \subset X$** называется число $|xA| = \inf\{|xa|: a \in A\}$. Для числа $r > 0$ под **открытым** (соответственно **замкнутым**) шаром радиуса r подмножества $A \subset (X, \varrho_X)$ понимаются

$$O(A, r) = \{x: |xA| < r\} \text{ и } B(A, r) = \{x: |xA| \leq r\} \text{ соответственно.} \quad (4)$$

Подчеркнем, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар радиуса r замкнутого множества является замкнутым множеством, которое, впрочем, может не совпадать с замыканием открытого шара радиуса r .

Для подмножеств $A, C \subset (X, \varrho_X)$ **расстоянием Хаусдорфа** называется число

$$\begin{aligned} d_H(A, C) &= \inf\{r: A \subset O(C, r), C \subset O(A, r)\} = \\ &= \min\{r: A \subset B(C, r), C \subset B(A, r)\} = \sup\{|aC|, |cA|: a \in A, c \in C\} = \\ &= \max\{\sup\{|aC|: a \in A\}, \sup\{|cA|: c \in C\}\} = \max\{\overrightarrow{d}_H(A, C), \overrightarrow{d}_H(C, A)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь фигурирует одностороннее расстояние Хаусдорфа

$$\overrightarrow{d}_H(A, C) = \inf\{r: A \subset O(C, r)\} = \min\{r: A \subset B(C, r)\} = \sup\{|aC|: a \in A\}.$$

Конструкция топологии Вьеториса позволяет говорить о пространстве замкнутых подмножеств 2^X произвольного топологического пространства X . Для целей разных задач на гиперпространстве вводятся и другие топологии и рассматриваются различные его подпространства.

Базу топологии Вьеториса на 2^X образуют множества вида

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in 2^X: A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ и } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i = 1, \dots, k\},$$

где $U_1, \dots, U_k$ — произвольный конечный набор открытых множеств пространства X (взятых из какой-нибудь его базы).

В.И. Пономарев ввел [43] в 1959 году на пространстве 2^X всех непустых замкнутых подмножеств другую топологию. Множество 2^X в этой топологии он обозначает κX . Базу топологии пространства κX образуют множества вида

$$\langle U \rangle = \{A \in 2^X: A \subset U\},$$

где U — произвольное непустое открытое множество пространства X .

Мнозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ с замкнутыми образами точек соответствует однозначному отображению $\hat{F}: X \rightarrow 2^Y$. При этом разные понятия непрерывности многозначного отображения согласованы с разными топологиями на гиперпространстве 2^Y .

4. Через $\text{exr } X$ обозначается, называемое **экспонентой** пространства X , подпространство 2^X (в топологии Вьеториса), состоящее из всех компактных подмножеств пространства X . Для компактного пространства X имеет место равенство $\text{exr } X = 2^X$. Для метрического пространства X топология Вьеториса на $\text{exr } X$ порождается метрикой Хаусдорфа d_H :

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0: A \subset O(B, \varepsilon), B \subset O(A, \varepsilon)\}.$$

В общем случае топология на 2^X , порождённая метрикой Хаусдорфа d_H , несравнима с топологией Вьеториса (даже если пространство (X, ϱ) вполне ограничено и сепарабельно).

Переход от X к $\text{exr } X$ является функториальным, т.е. операция exr является ковариантным функтором. Ясно, что для $\{A\} \in \text{exr } X$ надо положить $\text{exr } f(\{A\}) = \{f(A)\} \in \text{exr } Y$. Так как непрерывный образ компакта является компактом, то отображение $\text{exr } f$ определено корректно.

Операция перехода к 2^X на категории всех топологических пространств не является функториальной. Это связано с тем, что при непрерывном отображении образ замкнутого множества не обязан быть замкнутым множеством.

Операция перехода к 2^X является функториальной на категории всех топологических пространств и их замкнутых (возможно многозначных) отображениях.

Попытка формулой $\text{exr } f(\{A\}) = \{f^{-1}(A)\} \in \text{exr } X$, где $\{A\} \in \text{exr } Y$, задать контравариантный функтор упирается в то, что при непрерывном отображении прообраз непустого замкнутого множества является замкнутым, но возможно пустым, множеством. Функториальность имеет место на подкатегории топологических пространств и их непрерывных сюръекций.

Рассмотрение малого образа замкнутого множества при открытом отображении также упирается в то, что малый образ может быть пустым.

Важным свойством функтора exr является его непрерывность, т.е. свойство перестановочности exr с пределом обратного спектра: $\text{exr } \varprojlim S = \varprojlim \text{exr } S$.

5. Через $\text{exr}^c X$ обозначается, называемое **континуальной экспонентой** пространства X , подпространство экспоненты $\text{exr } X$, состоящее из всех континуумов (связных компактов) пространства X . Операции $\text{exr } X$ и $\text{exr}^c X$ являются ковариантными функторами в категории всех топологических пространств и непрерывных отображений и в таких ее полных подкатегориях, как категории компактных пространств, метрических пространств, компактных метрических пространств.

На непрерывность функтора exr^c впервые указал J. Segal в 1959 году [44, Theorem 1.1].

6. Для всякого конечного кардинала $n \geq 1$ на категории топологических пространств определены функторы n -й гиперсимметрической степени

$$\text{exr}_n X = \{A \in \text{exr } X: |A| \leq n\}$$

и n -й континуальной гиперсимметрической степени: $\text{exr}_n^c X$ состоит из всех непустых замкнутых компактных подмножеств пространства X , имеющих не более n компонент связности. Отметим, что если exr_n является

подфунктором $\exp$, то для континуальной степени наоборот функтор $\exp^c$ является подфунктором $\exp_n^c$. Гиперсимметрическая степень впервые была определена в работе Борсука и Улама.

Функтор $\exp_n$ непрерывен.

Принципиально важной для общей топологии оказалась теорема Ботта о том, что $\exp_3 S^1$ гомеоморфно S^3 .

Вопрос 4.2. Is there a one-dimensional continuum, X , such that the 2-sphere S^2 can be embedded in $\exp_2(X)$? (S^2 can not be embedded in the Cartesian product of any two 1-dimensional metric spaces [45].)

Обзор результатов об однозначной восстановимости континуума X по континуумам $\exp_n^c X$ и $\exp_n^c X$ дан в работе [46]. Generalizing previous results by Duda, Nadler, Nadler and Eberhart and Macías, Acosta proved that the following continua have unique hyperspace $\exp^c X$:

- (a) Finite graphs different from an arc and the simple closed curve ([79]);
- (b) Hereditarily indecomposable continua ([80]);
- (c) Smooth fans ([79, Corollary 3.3]);
- (d) Indecomposable continua such that all their proper nondegenerate subcontinua are arcs ([81]).

Acosta also proved that the metric, with nondegenerate remainder, compactifications of the ray $[0, \infty)$ have unique hyperspace $C(X)$ ([82]). Macías has shown that hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace 2^X ([83]). Castañeda has proved that finite graphs have unique hyperspace $F_2(X)$ and $F_3(X)$ ([84]).

В качестве моделей некоторых гиперпространств приведем.

- 1. (R. Schori) $\exp_2^c[0, 1] \cong [0, 1]^4$ ([86]).
- 2. (A. Illanes) $\exp_2^c S^1 \cong C(I^2 \times S^1)$ ([87]).
- 3. (A. Illanes) Finite graphs have unique hyperspace $\exp_n^c X$ ([85]).
- 4. (A. Illanes, E. Castañeda) Finite graphs have unique hyperspace $\exp_n X$ for $n \geq 4$ ([84]).

7. Теперь определим симметрическую степень пространства X . Подгруппа $G \subset S_n$ симметрической группы на n символах (группы всех перестановок n элементов) действует на n -й степени X^n пространства X как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с факторной топологией обозначим через $SP_G^n X$. Таким образом, точки пространства $SP_G^n X$ — это конечные подмножества (классы эквивалентности) произведения X^n . При этом две точки $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ считаются эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma \in G$, что $y_i = x_{\sigma(i)}$. Фактор-отображение $\pi_G^X: X^n \rightarrow SP_G^n X$, очевидно, открыто.

Пространство $SP_G^n X$ называется **G -симметрической степенью** пространства X . Частные случаи G -симметрической степени впервые появились в работе Ричардсона. Если $G = S_n$, то пространство $SP_G^n X$ обозначается через $SP^n X$ и называется n -й симметрической степенью пространства X . Если группа G состоит только из единичного элемента, то $SP_G^n X = X^n$.

Функтор SP_G^n непрерывен.

Легко видеть, что функторы $\exp_2$ и $SP^2 X$ совпадают. Но $\exp_n \neq SP^n X$ для любого $n \geq 3$. В самом деле, например, для $x \neq y$ точки (x, x, y) , (x, y, y) гиперсимметрично эквивалентны, но не эквивалентны симметрично. Отметим также, что при $n \geq 3$ отображение $X^n \rightarrow \exp_n X$, переводящее точку $(x_1, \dots, x_n)$ в множество ее координат $\{x_1, \dots, x_n\}$, не открыто (если, конечно, X содержит более одной неизолированной точки).

8. Теоремы Войдыславского и Вэста — Кёртиса — Шори как теоремы о преобразовании пеановских континуумов в абсолютные ретракты и гильбертовы кирпичи (что будет обсуждаться позже) в последние годы распространялись и на другие функторы экспоненциального типа. Так С. Eberhart, S.B. Nadler and W.O. Nowell ввели [47] два новых функтора Γ и Γ^c . Через $\Gamma(X)$ (соответственно $\Gamma^c(X)$) будем обозначать множество всех порядковых дуг в экспоненте $\exp X$ (соответственно континуальной экспоненте $\exp^c X$) компакта X . Множество $\Gamma(X)$ замкнуто во второй экспоненте $\exp(\exp X)$ и, следовательно, является компактом, а $\Gamma^c(X)$ замкнуто в $\Gamma(X)$. Операции Γ и Γ^c являются подфункторами функтора $\exp \circ \exp = (\exp)^{(2)}$.

Any arc has a natural total ordering; any hyperspace has a natural partial ordering (namely, containment). An order arc in a hyperspace, $\mathcal{H}$, is an arc $\alpha \subset \mathcal{H}$ such that the partial ordering of containment for $\mathcal{H}$ agrees on α with the total ordering on α . We find it convenient to state the definition of an order arc as in 4.3 below.

A collection, $\mathcal{N}$, of sets is called a **nest (гнездо)** provided that for any $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $N_1 \subset N_2$ or $N_2 \subset N_1$.

Определение 4.3. Let X be a compactum, and let $\mathcal{H} \subset 2^X$. An **order arc in $\mathcal{H}$** is an arc, α , in $\mathcal{H}$ such that α is a nest.

9. Система S замкнутых подмножеств пространства X называется **сцепленной**, если любые два элемента S пересекаются. Всякая сцепленная система замкнутых подмножеств содержится в некоторой максимальной сцепленной системе. **Суперрасширением пространства X** называется множество λX максимальных сцепленных систем X , наделенное волмэновской топологией, т.е. замкнутую предбазу в λX образуют множества

вида $\{S: S \in \lambda X, A \in S\}$, где A замкнуто в X . Суперрасширения топологических пространств ввел в 1969 году основатель голландской школы общей топологии Johannes de Groot [48].

Суперрасширение λX является бикомпактом, причем для всякого бикомпакта X вес X равен весу λX . Последнее следует из наличия естественного вложения $\lambda X \subset \exp(\exp X) = (\exp)^{(2)} X$ (всякая сцепленная система $S \in \lambda X$ является замкнутым подмножеством $\exp X$).

Если дано отображение $f: X \rightarrow Y$, то естественно возникает отображение суперрасширений $\lambda f: \lambda X \rightarrow \lambda Y$; с помощью отображения f максимальная сцепленная система $S = \{F_\alpha\} \in \lambda X$ переводится в сцепленную систему $fS = \{f(F_\alpha)\}$, которая либо является максимальной (если f “на”, либо однозначно дополняется до максимальной). Таким образом, λ является ковариантным функтором из категории бикомпактов и непрерывных отображений в категорию бикомпактов и непрерывных отображений.

Функтор λ непрерывен.

10. Функторы λ_n и $^*\lambda_n$.

$\lambda_n X$ состоит из всех максимальных сцепленных систем $S \in \lambda X$, носители которых состоят из $\leq n$ точек.

Пространство $^*\lambda_n X$ состоит из тех максимальных сцепленных систем $S \in \lambda X$, для которых $|b(S)| \leq n$, где через $b(S)$ обозначается множество всех минимальных по отношению включения элементов системы S .

Функторы λ_n и $^*\lambda_n$ непрерывны.

11. Функтор $F^{(\omega)}$.

Мы уже отмечали, что для некоторых функторов, например для нормальных, имеется естественное вложение $\text{Id} \subset F$. Таким образом возникает прямая последовательность функторов (объектов)

$$X \rightarrow F(X) \rightarrow F(F(X)) \rightarrow \dots \rightarrow F^{(k)}(X) \rightarrow F^{(k+1)}(X) \rightarrow \dots \quad (6)$$

Если в рассматриваемой категории определен прямой предел $\varinjlim$, то предел прямой последовательности (6) обозначаем $F^{(\omega)}$.

12. Функтор $F^{[\omega]}$.

Для некоторых функторов, например для функторов $\exp$ и $\exp^c$, имеется естественное отображение (ретракция) $F \leftarrow F^{(2)}$. Таким образом возникает обратная последовательность функторов (объектов)

$$F(X) \leftarrow F(F(X)) \leftarrow \dots \leftarrow F^{(k)}(X) \leftarrow F^{(k+1)}(X) \leftarrow \dots \quad (7)$$

Если в рассматриваемой категории определен обратный предел $\varprojlim$, то предел обратной последовательности (7) обозначаем $F^{[\omega]}$.

13. Функтор P вероятностных мер. Впоследствии мы рассмотрим функтор $C(X)$ всех непрерывных функций на компактном пространстве X . Действительное (комплексное) векторное пространство $C(X)$ мы наделяем $\sup$ -нормой, в которой оно является пространством Банаха. Двойственное нормированное пространство $(C(X))^*$ согласно теореме Рисса изоморфно пространству $M(X)$ конечных регулярных мер на X . **Под конечной регулярной мерой** на компактном пространстве X понимается счетно-аддитивная конечная регулярная функция $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на σ -алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}(X)$.

Семейство $\mathcal{S}$ подмножеств множества X называется **σ -алгеброй**, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\mathcal{S}$ содержит множество X .
2. Если $A \in \mathcal{S}$, то и его дополнение $X \setminus A \in \mathcal{S}$.
3. Объединение (или пересечение) счётного подсемейства из $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathcal{S}$.

Всякую σ -алгебру можно понимать как подмножество 2^X , поэтому всякое семейство подмножеств множества X лежит в минимальной (наименьшей) σ -алгебре, содержащей все множества заданного семейства. Эту наименьшую σ -алгебру можно описать и конструктивным образом как результат счетной последовательности операций объединения (пересечения) и дополнения.

Борелевская сигма-алгебра — минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства (также она порождается и всеми замкнутыми множествами). Эти подмножества называются **борелевскими**. Так возникает борелевская иерархия множеств. Стартуя с открытых (замкнутых) множеств, мы получаем возрастающую последовательность классов множеств

$$G \subset G_\delta \subset G_{\delta\sigma} \subset G_{\sigma\delta} \subset \dots \subset G_{\omega_0} \subset G_{\omega_0?\delta\sigma} \subset \dots \subset G_{\omega_1};$$

$$F \subset F_\sigma \subset F_{\sigma\delta} \subset F_{\delta\sigma} \subset \dots \subset F_{\omega_0} \subset F_{\omega_0?\delta\sigma} \subset \dots \subset F_{\omega_1}.$$

Дескриптивная теория множеств, раздел теории множеств, изучающий строение точечных множеств исходя из их построения с помощью операций объединения, пересечения, проекции и прочих из более простых

точечных множеств. Развитие дескриптивной теории множеств началось с изучения и классификации т. н. борелевских множеств ($\mathcal{B}$ -множеств) в трудах французских математиков Р.Л. Бэра и А.Л. Лебега, связанных с классификацией разрывных функций (1905). Борелевские множества определяются как множества, которые могут быть построены, исходя из замкнутых множеств, применением операций объединения и пересечения в любых комбинациях, но каждый раз эти операции применяются к счётному или конечному числу множеств. Лебег показал, что эти множества, и только они, могут быть получены как множества точек, в которых входящая в классификацию Бэра действительная функция $f(x)$ обращается в нуль или, более общо, удовлетворяет условию вида $a < f(x) \leq b$.

Дальнейшее развитие дескриптивной теории множеств было осуществлено преимущественно российскими математиками, особенно московской школой, созданной Н.Н. Лузиным. П.С. Александров доказал (1916) теорему о том, что **всякое несчётное борелевское множество имеет мощность континуума**.

Аппарат этого доказательства был применён М.Я. Суслиным для построения теории т.н. A -множеств, охватывающих как частный случай борелевские множества. Оказалось, что A -множества совпадают с непрерывными образами множества всех иррациональных чисел. Лузин называл их аналитическими множествами. Теория A -множеств в течение нескольких лет оставалась в центре дескриптивной теории множеств, вплоть до того времени, как Лузин пришел к общему определению проективных множеств, которые могут быть получены, отправляясь от множества всех иррациональных чисел при помощи повторного применения операции вычитания и непрерывного отображения.

Важный вклад в теорию A -множеств внесли работы российских математиков П.С. Новикова и Л.В. Келдыша. Дескриптивная теория множеств тесно связана с исследованиями по основаниям математики (в частности, с такими вопросами, как эффективная определимость математических объектов и разрешимость математических проблем)."

Регулярная мера это мера, определённая на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(X)$ топологического пространства X , такая что для любого борелевского множества $A \in \mathcal{B}(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $G \subset X$, содержащее A ($A \subset G$) и $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

Равносильное определение: для любого $A \in \mathcal{B}(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся замкнутое множество $F \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

Ненулевая мера $\mu \in M(X)$ называется **положительной** (символически $\mu \geq 0$), если $\mu(\varphi) \geq 0$ для всякой функции $\varphi \geq 0$. Часто значение $\mu(\varphi)$ линейного функционала μ на функции φ обозначают через $\int \varphi d\mu$. Множество положительных мер называется **положительным конусом** пространства $M(X)$.

Предложение 4.4. Мера μ положительна тогда и только тогда, когда $\|\mu\| = \mu(1_X)$.

Доказательство. Пусть $\mu \geq 0$ и $|\varphi| \leq 1$. Тогда $\mu(1_X - \varphi) \geq 0$. Следовательно, $\mu(1_X) \geq \mu(\varphi)$, откуда $\mu(1_X) = \|\mu\|$.

Наоборот, пусть теперь $\mu(1_X) = \|\mu\|$ и $\varphi \geq 0$. Положим $\psi = 1_X - (\varphi/\|\varphi\|)$. Поскольку $\|\psi\| \leq 1$, имеем $\mu(\psi) \leq \|\mu\| = \mu(1_X)$, т.е. $\mu(1_X) - \mu(\varphi/\|\varphi\|) \leq \mu(1_X)$. Следовательно, $\mu(\varphi) \geq 0$. $\square$

Мера $\mu \in M(X)$ называется **нормированной**, если $\|\mu\| = 1$.

Положительная нормированная мера называется **вероятностной**.

Наделим множество $M(X)$ слабой топологией, т.е. считаем $M(X)$ подмножеством произведения числовых прямых $\prod \{\mathbb{R}_\varphi : \varphi \in C(X)\}$.

Подпространство $M(X)$, состоящее из всех вероятностных мер, называется **пространством вероятностных мер** и обозначается $P(X)$.

4.7 Топология на пространстве отображений.

В некоторых категориях множество морфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ удастся надделить дополнительными структурами так, что множество морфизмов оказывается не только в категории множеств, но и в первоначальной категории $\mathcal{K}$. Особенно естественно это сделать в алгебраических категориях групп, колец, векторных пространств, нормированных пространств.

В топологической категории вопрос решается сложнее из-за того, что на множестве морфизмов нет естественно возникающей единственной топологии. Мы рассмотрим этот вопрос как с точки зрения конструктивного задания некоторых топологий, так и с чисто академической точки зрения наложения на топологии условий, которые естественно считать разумными, т.е. полезными.

В категории множеств и её (над)(под)категории топологических пространств всякий морфизм $f: X \rightarrow Y$ мы отождествили с точкой в декартовой степени Y^X . В случае топологического пространства Y и произвольного

множества X (дискретного топологического пространства X) на декартовой степени Y^X имеется стандартная топология Тихонова на произведении. На языке отображений эта топология называется **топологией поточечной сходимости**.

В случае метрического пространства Y и произвольного множества X (дискретного топологического пространства X) на декартовой степени Y^X имеется стандартная $\sup$ -топология ℓ_∞^X . На языке отображений эта топология называется **топологией равномерной сходимости**.

Топология равномерной сходимости определяется в случае произвольного равномерного пространства Y и в этом общем случае называется **равномерной топологией** на пространстве отображений.

Легко видеть, что для $f \in Y^{X \times T}$ формула

$$\{[\Lambda(f)](t)\}(x) = f(x, t)$$

определяет взаимно однозначное соответствие $\Lambda: Y^{X \times T} \rightarrow (Y^X)^T$ между множествами всех (не обязательно непрерывных) отображений пространства $X \times T$ в Y и множеством всех отображений пространства T в множество всех отображений пространства X в Y . Это соответствие называется **экспоненциальным отображением**. На уровне множеств экспоненциальное отображение можно записать в виде равенства

$$Y^{X \times T} = (Y^X)^T.$$

Естественно изучать поведение Λ и Λ^{-1} на множествах непрерывных отображений $Y^{X \times T}$ и $(Y^X)^T$; последнее множество определено корректно, если на Y^X задана топология.

Прежде всего встает вопрос: принадлежит ли $\Lambda(f)$ множеству $(Y^X)^T$, если $f \in Y^{X \times T}$; это так, если топология на Y^X не слишком сильная.

Другой естественный вопрос: принадлежит ли $\Lambda^{-1}(h)$ пространству $Y^{X \times T}$, если $h \in (Y^X)^T$; это так, если топология на Y^X не слишком слабая.

Наконец, можно спросить, когда экспоненциальное отображение непрерывно и при каких условиях оно является гомеоморфизмом.

Возможно геометрически проще представить себе обратное отображение Λ^{-1} . Отображению $h: T \rightarrow Y^X$ поставим в соответствие отображение $f = \Lambda^{-1}(h): X \times T \rightarrow Y$, заданное формулой

$$h \mapsto f(x, t) = h(t)(x) \in Y.$$

Ещё раз повторим, что построенное отображение $\Lambda^{-1}: (Y^X)^T \rightarrow Y^{X \times T}$ является биекцией. “Основным считается” экспоненциальное отображение так как оно чаще, чем обратное к нему, обладает хорошими свойствами.

Топологию на Y^X называют **собственной**, если для каждого пространства T и любого $f \in Y^{X \times T}$ отображение $\Lambda(f)$ принадлежит пространству $(Y^X)^T$.

Аналогично топологию на Y^X называют **допустимой**, если для каждого пространства T и любого $h \in (Y^X)^T$ отображение $\Lambda^{-1}(h)$ принадлежит пространству $Y^{X \times T}$.

Топологию на Y^X называют **приемлемой**, если она одновременно собственная и допустимая.

Отображение $\Omega: Y^X \times X \rightarrow Y$, заданное формулой

$$\Omega(f, x) = f(x),$$

называется **отображением вычисления** для пространства Y^X .

Теорема 4.5 (R. Arens, J. Dugundji (1951 [49])). *Топология на Y^X допустима в том и только в том случае, если отображение вычисления для пространства Y^X непрерывно, т.е. если непрерывно отображение $\Omega: Y^X \times X \rightarrow Y$.*

Теорема 4.6 (R. Arens, J. Dugundji (1951 [49])). *Для каждой пары топологических пространств X, Y и любых двух топологий τ, τ' на пространстве Y^X имеют место следующие утверждения.*

- (1) Если $\tau \subset \tau'$ и топология τ' собственная, то топология τ также собственная.
- (2) Если $\tau \subset \tau'$ и топология τ допустимая, то топология τ' также допустимая.
- (3) Если топология τ собственная, а топология τ' допустимая, то $\tau \subset \tau'$.

(4) На Y^X существует не более одной приемлемой топологии.

Для подмножеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ положим

$$M(A, B) = \{f \in Y^X : f(A) \subset B\}.$$

Базу **топологии поточечной сходимости** на Y^X составляют множества вида

$$\cap_1^k M(A_i, U_i), \text{ где } A_i \text{ конечно, } U_i \text{ открыто в } Y.$$

Базу **компактно-открытой топологии** на Y^X составляют множества вида

$$\cap_1^k M(C_i, U_i), \text{ где } C_i \text{ компактно, } U_i \text{ открыто в } Y.$$

Теорема 4.7 (Р.Н. Фок (1945 [50])). *Для каждой пары топологических пространств X, Y компактно-открытая топология на Y^X является собственной.*

Теорема 4.8 (Р.Н. Фок (1945 [50])). *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то для каждого топологического пространства Y компактно-открытая топология на Y^X является приемлемой.*

Если для вполне регулярного пространства X на множестве $\mathbb{R}^X$ существует приемлемая топология, то пространство X локально компактно. Однако подчеркнем, что то пространство T , которое вынуждает пространство X быть локально компактным, само является довольно плохим; кажется оно не хаусдорфово.

Теорема 4.9 (J.R. Jackson (1952 [51])). *Для каждой пары X, T хаусдорфовых пространств и произвольного топологического пространства Y экспоненциальное отображение $\Lambda: Y^{X \times T} \rightarrow (Y^X)^T$ является гомеоморфным вложением по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

Теорема 4.10 (J.R. Jackson (1952 [51])). *Для локально компактного хаусдорфова пространства X , хаусдорфова пространства T и произвольного топологического пространства Y экспоненциальное отображение $\Lambda: Y^{X \times T} \rightarrow (Y^X)^T$ является гомеоморфизмом по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

Теорема 4.11 (Р.Н. Фок (1945 [50]), J.R. Jackson (1952 [51])). *Для каждой пары X, T хаусдорфовых пространств с первой аксиомой счетности и произвольного топологического пространства Y экспоненциальное отображение $\Lambda: Y^{X \times T} \rightarrow (Y^X)^T$ является гомеоморфизмом по отношению к компактно-открытой топологии на пространствах отображений.*

4.8 Гомотопическая категория.

Иногда в категории полезно рассмотреть более широкое отношение эквивалентности, что приводит к созданию новой категории, объектами которой являются классы эквивалентности по этому отношению.

9. Наиболее яркий пример дает понятие гомотопности отображений.

Два непрерывных отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует такое непрерывное отображение

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y, \text{ что } H|_{X \times 0} = f \text{ и } H|_{X \times 1} = g.$$

Не сложно проверить, что отношение гомотопности отображений является отношением эквивалентности, поэтому множество $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ разбивается на классы эквивалентности, множество которых обозначаем через $\text{Hom}_{\mathcal{Hom}}(X, Y)$.

В описании категории $\mathcal{Hom}$ приняты два эквивалентных варианта. При первом подходе считается, что объектами являются все топологические пространства. При втором подходе под объектом понимается класс эквивалентных пространств в только что описанной категории.

Пространство X называется **гомотопически тривиальным**, если оно гомотопически эквивалентно одноточечному пространству, т.е. если оно стягивается по себе в точку, т.е. если существует такое отображение $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$, что $H|_{X \times 0} = 1_X$ и $|H(X \times 1)| = 1$.

Под **конусом** CX топологического пространства понимается факторпространство $CX = X \times [0, 1] / (X \times \{1\})$. Для компактного метрического пространства X конус CX также метризуем. Для некомпактного пространства фактор-топология неметризуема. Иногда на конусе метрического пространства берётся следующая естественная

метрика, которую естественно описать полуметрикой на цилиндре $X \times [0, 1]$: $|(x_1, t_1), (x_2, t_2)| = \min\{1 - t_1, 1 - t_2\}|x_1, x_2| + |t_1 - t_2|$.

Эквивалентное определение гомотопии – как кривой в пространстве $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$. На этом языке можно сказать, что классы гомотопных отображений это компоненты линейной связности пространства $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$. Иногда рассматривают классы отображений, когда отношение эквивалентности задаётся условием, что два рассматриваемых отображения лежат в одном связном компакте. Иногда понятие гомотопности расширяется до того, что отображения лежат в одной компоненте связности. Понятие гомотопности можно расширить и далее до того, что заданные отображения связаны ε -цепочкой для любого $\varepsilon > 0$.

Axiomatic characterization of the theory of Alexandroff–Čech cohomology, based on the axioms of Eilenberg and Steenrod on the category of paracompact spaces, was given by Ph. Bacon [52]. One of the axioms is the Homotopy Axiom for cohomology, which is equivalent to the following statement:

Axiom. Let $i_0, i_1: X \rightarrow X \times [0, 1]$ be embeddings of a X into $X \times [0, 1]$, defined by $i_0(x) = (x, 0)$ and $i_1(x) = (x, 1)$. Then they induce the same homomorphisms of cohomologies:

$$i_0^* = i_1^*: \check{H}^*(X \times [0, 1]) \rightarrow \check{H}^*(X).$$

S. Deo proved that on the category of compact spaces the unit interval $[0, 1]$ in the Axiom can be replaced by any connected space T [53, Corollary 3]. U.H. Karimov constructed a connected compact space T and a locally compact polyhedron X such that $i_{t_0}^* \neq i_{t_1}^*$ for some points $t_0, t_1 \in T$ [54].

10. Под гомотопией отображений отмеченных пространств $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ понимается непрерывная кривая h_t в пространстве $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}((X, x_0), (Y, y_0))$. Эквивалентным образом это непрерывное отображение $H: (X \times [0, 1], x_0 \times [0, 1]) \rightarrow (Y, y_0)$.

4.9 Шейповая категория.

11. Имеется много разных подходов к определению шейпов разных классов пространств. Но на классе всех компактных метризуемых пространств многие из них совпадают. Именно этим классом мы и ограничимся. Классическим является определение К. Борсука [55] 1968 года, с которого начался бум и расцвет теории шейпов. Впоследствии более широко был осознан подход D. Christie [56], который в Принстонской диссертации, написанной под руководством S. Lefschetz и опубликованной в 1944 году, развивал гомотопическую теорию соответствующую гомотопиям Стинрода.

Для понимания шейповой категории (шейпового морфизма) надо иметь в виду следующую аналогию. Точки из нароста пополнения метрического пространства конструктивно являются не “геометрическими” точками, а фундаментальными последовательностями точек. Кроме того необходимо иметь в виду, что некоторые разные фундаментальные последовательности точек задают одну точку из нароста. Так и шейповый морфизм нужно понимать как некоторый минимальный (счетный) набор согласованных отображений и на таких наборах нужно задать отношение эквивалентности. Или все такие наборы объединить в один большой набор. Первый подход реализуется в конструкции К. Борсука. Второй подход перехода к большому набору отображений часто разбивается на два шага и реализуется взятием не самых больших наборов, а взятием “промежуточных” наборов отображений и определением отношения эквивалентности на них. Такое разбиение определения шейпового морфизма сохраняет некоторую теоретико-множественную наглядность. Подчеркнем, что более наглядное определение К. Борсука требует большей работы для доказательства корректности определения шейпового морфизма.

Шейповым отображением $\bar{f}: X \rightarrow Y$ называется соответствие, которое каждому непрерывному отображению $\nu_P^Y: Y \rightarrow P$ в конечный полиэдр (в ANR -компакт) P ставит в соответствие отображение $\nu_P^X = f(\nu_P^Y): X \rightarrow P$ так, что для любых трех отображений $\nu_P^Y: Y \rightarrow P$, $\nu_Q^Y: Y \rightarrow Q$ и $p_P^Q: Q \rightarrow P$ таких, что ν_P^Y и $p_P^Q \circ \nu_Q^Y$ гомотопны, отображения $f(\nu_P^Y)$ и $p_P^Q \circ f(\nu_Q^Y)$ также гомотопны.

Заметим, что замена любого отображения $\nu_P^X: X \rightarrow P$ на гомотопное отображение $\mu_P^X: X \rightarrow P$ задает “новое” шейповое отображение X в Y . Поэтому на самом деле в определении шейпового отображения значение имеют не сами отображения ν_P^Y и $f(\nu_P^Y)$ а их гомотопические классы. Это и есть второй шаг в создании большого набора отображений.

Два шейповых отображения $\bar{f}, \bar{g}: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если отображения $f(\nu_P^Y)$ и $g(\nu_P^Y)$ гомотопны для любого отображения $\nu_P^Y: Y \rightarrow P$.

Легко проверить, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве шейповых отображений. Под шейповым морфизмом понимается класс гомотопных шейповых отображений. Для

класса мы сохраним обозначение $\bar{f}: X \rightarrow Y$ и далее в равенствах всегда будет иметься в виду именно класс. Подчеркнем, что отождествление эквивалентных объектов приведет к еще большей потере геометричности, поэтому мы не будем этого делать.

Предложение 4.12. *Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает шейповое отображение $\bar{f}: X \rightarrow Y$, задаваемое формулой $\nu_P^X = f^*(\nu_P^Y) = \nu_P^Y \circ f$.*

Если отображения $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопны, то гомотопны и порожденные ими шейповые отображения $\bar{f}^$ и $\bar{g}^*$.*

Доказательство. Действительно, из гомотопности отображений ν_P^Y и $p_P^Q \circ \nu_Q^Y$ следует гомотопность отображений $\nu_P^Y \circ f$ и $(p_P^Q \circ \nu_Q^Y) \circ f = p_P^Q \circ (\nu_Q^Y \circ f)$.

Из гомотопности отображений $f, g: X \rightarrow Y$ следует гомотопность отображений $\nu_P^Y \circ f$ и $\nu_P^Y \circ g$ для любого отображения $\nu_P^Y: Y \rightarrow P$. $\square$

Предложение 4.13. *Пусть $Y \in ANR$.*

Для всякого шейпового отображения $\bar{f}: X \rightarrow Y$ существует такое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, что $\bar{f} = f^$.*

Непрерывные отображения $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопны тогда только тогда, когда гомотопны порожденные ими шейповые отображения $\bar{f}^$ и $\bar{g}^*$.*

Доказательство. Для отображения $\nu_Y^Y = 1_Y$ рассмотри отображение $f = \nu_Y^X = f(1_Y): X \rightarrow Y$. Тогда для всякого отображения ν_P^Y из равенства $\nu_P^Y = \nu_P^Y \circ 1_Y$ следует гомотопность отображений ν_P^X и $\nu_P^Y \circ f(1_Y) = \nu_P^Y \circ f$.

Из гомотопности шейповых отображений $\bar{f}^*, \bar{g}^*: X \rightarrow Y$ следует гомотопность отображений $1_Y \circ f = f$ и $1_Y \circ g = g$. $\square$

Отсюда следует, что на категории конечных полиэдров (ANR -компактов) гомотопическая и шейповые категории совпадают.

Изложенный здесь подход к теории шейпов плох тем, что он не позволяет непосредственно переносить конструкции и функторы с топологической категории на шейповую. Так например, если возвести в квадрат пространство не представляет труда, то морфизм $\bar{f}: X \rightarrow Y$ возвести в квадрат $\bar{f}^2: X^2 \rightarrow Y^2$ непосредственно невозможно. Наиболее естественным в этом случае является обращение к конструкции К. Борсука. Для ознакомления с основными фактами теории шейпов метризуемых компактов желающие могут обратиться к монографии К. Борсука [57].

4.10 * Топологическое описание пространств $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Топологическое пространство X называется **топологически однородным**, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует такое гомеоморфное отображение (на) $f: X \rightarrow X$, что $f(x) = y$. Сфера в евклидовом пространстве даже метрически однородна. Единичный шар в евклидовом пространстве топологически не однороден, но это не просто доказать.

Теорема 4.14 (Л.Е.Ж. Brouwer (1910 [58])). *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X гомеоморфно множеству Кантора C ;
- (2) X гомеоморфно $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$;
- (3) X является метризуемым компактным нульмерным пространством без изолированных точек.

В частности, множество Кантора гомеоморфно произведению счетного числа нетривиальных нульмерных метризуемых компактов. Отсюда уже вытекает, в частности, что на множестве Кантора есть много структур разных топологических групп. Поэтому множество Кантора топологически однородно. Замена произведения на предел обратной последовательности пространств позволяет ввести на множестве Кантора структуру произвольной проконечной группы. Таким образом для всякого простого числа $p \geq 2$ на множестве Кантора C задается структура целых p -адических чисел.

Более общо для всякого набора чисел $\{m_i \geq 2\}_{i=1}^{\infty}$ обратный предел последовательности конечных колец

$$p_i^{i+1}: \mathbb{Z}_{n_{i+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{n_i}, \text{ где } n_i = m_1 \cdot \dots \cdot m_i \text{ и } p_i^{i+1}(a) = a \pmod{n_i},$$

гомеоморфен множеству Кантора.

Из теоремы Брауэра 4.14 также вытекает, что произведение множества Кантора на любой нульмерный метризуемый компакт гомеоморфно множеству Кантора.

Теорема 4.15. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X гомеоморфно (замкнутому) подмножеству пространства Кантора C ;
- (2) X является нульмерным метризуемым сепарабельным (компактным) пространством.

Следствие 4.16. *Для всякого компактного подмножества $X \subset C$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) X не открыто в C ;
- (2) C/X гомеоморфно C ;
- (3) $C \setminus X$ гомеоморфно $C \setminus \{0\}$.

Доказательство. 1) $\implies$ 2). Пространство C/X нульмерно, компактно и метризуемо так как регулярно и имеет счетную базу. Можно сослаться и на более общий результат [59, Theorem 4.2.13]. Согласно условию точка $\{X\}$ не изолирована в C/X . Применение теоремы 4.14 завершает доказательство.

Импликация 2) $\implies$ 3) вытекает из гомеоморфности пространств $C \setminus X$ и $C/X \setminus \{X\} \cong C \setminus \{0\}$.

Импликация 3) $\implies$ 1) вытекает из нижеследующего утверждения. □

Следствие 4.17. *Для всякого компактного подмножества $X \subset C$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) X открыто в C ;
- (2) C/X одноточечно или гомеоморфно дизъюнктному объединению C и точки;
- (3) $C \setminus X$ пусто или гомеоморфно C .

Доказательство. Импликации 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) доказываются повторением рассуждений следствия 4.16.

Импликация 3) $\implies$ 1) вытекает из уже доказанных импликаций следствия 4.16. □

Метризуемое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая его допустимая метрика полна. Пространства, обладающие полной метрикой, описывает

Теорема 4.18. *Для метризуемого пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X метризуемо полной метрикой;
- (2) X полно по Чеху, т.е. имеет тип G_δ в своем Стоун-Чеховском расширении βX ;
- (3) X имеет тип G_δ в каждом своем компактном расширении sX ;
- (4) X имеет тип G_δ в некотором своем компактном расширении sX ;
- (5) X имеет тип G_δ в любом объемлющем метрическом пространстве $X \subset Y$;
- (6) X имеет тип G_δ в некотором объемлющем полном метрическом пространстве $X \subset Y$.

Польским называется сепарабельное пространство, метризуемое полной метрикой.

Для бесконечного кардинала τ **пространством Бэра веса τ** называется счетная степень дискретного множества мощности τ , т.е. $B(\tau) = \tau^{\mathbb{N}}$.

Теорема 4.19. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X польское;
- (2) X гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (3) X является образом пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при открытом отображении.

Теорема 4.20. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X гомеоморфно множеству иррациональных чисел Irr ;
- (2) X гомеоморфно пространству Бэра счетного веса $B(\aleph_0) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- (3) X является польским нульмерным пространством без локально компактных точек.

Отсюда следует, что всякое непустое открытое подмножество пространства Бэра гомеоморфно самому пространству Бэра.

Из теоремы 4.20 также вытекает, что произведение пространства Бэра $B(\aleph_0)$ на любое нульмерное польское пространство гомеоморфно пространству Бэра $B(\aleph_0)$.

Теорема 4.21. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X гомеоморфно (замкнутому) подмножеству пространства Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- (2) X является нульмерным метризуемым сепарабельным (польским) пространством.

Следствие 4.22. *Для всякого компактного подмножества $X \subset B(\aleph_0)$ пространства $B(\aleph_0)$, $B(\aleph_0) \setminus X$ и $B(\aleph_0)/X$ попарно гомеоморфны.*

Доказательство. Покажем, что два последних пространства удовлетворяют теореме 4.20. Пространства $B(\aleph_0) \setminus X$ и $B(\aleph_0)/X$ нульмерны. Вложим пространство $B(\aleph_0)$ в компакт Кантора $X \subset B(\aleph_0) \subset \mathcal{C}$. Согласно теореме 4.18 его дополнение $\mathcal{C} \setminus B(\aleph_0)$ является σ -компактом. Тогда и дополнение $\mathcal{C}/X \setminus B(\aleph_0)/X$ является σ -компактом. Так как компакт X не открыт в $B(\aleph_0)$, то он не открыт и в $\mathcal{C}$. Согласно следствию 4.16 факторпространство $\mathcal{C}/X$ гомеоморфно $\mathcal{C}$. По теореме 4.18 факторпространство $B(\aleph_0)/X$ является польским. Так как пространство $B(\aleph_0)/X$ не имеет точек локальной компактности, то согласно теореме 4.20 оно гомеоморфно $B(\aleph_0)$.

Множество $B(\aleph_0) \setminus X$ открыто, поэтому гомеоморфно $B(\aleph_0)$. □

Для любого натурального n имеются аналоги пространства $\mathcal{C}$ – универсальный компакт Менгера $\mu^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $\dim \mu^n = n$ и пространства Бэра $\text{Irr} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – универсальное пространство Нёбелинга $\mathcal{N}^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $\dim \mathcal{N}^n = n$.

В качестве бесконечномерных аналогов выступают гильбертов куб $Q = I^{\mathbb{N}} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ и гильбертово пространство ℓ_2^{∞} .

В настоящее время все эти пространства имеют чисто топологические описания (обобщающие теоремы 4.14 и 4.20 соответственно). Бесконечномерный случай оказался и проще и важнее, в том числе для вопросов рассматриваемых в нашем курсе. Поэтому только его мы и осветим, причём в достаточном для наших целей объеме.

4.11 * Элементы бесконечномерной топологии.

Теорема 4.23 (О.Н. Keller (1931 [60])). *Гильбертов куб $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ топологически однороден.*

Теорема 4.24 (О.Н. Keller (1931 [60]), V.L. Klee, Jr. (1955 [61]), ([62, предложение 1.5.31])). *Каждое бесконечномерное компактное выпуклое подмножество произвольного сепарабельного пространства Фреше (Банаха) гомеоморфно гильбертову кубу $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Теорема 4.25 (V.L. Klee, Jr. (1955 [61])). *If C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, then there are cardinal numbers m and n with $0 \leq m \leq \aleph_0$ and $0 \leq n < \aleph_0$ such that C is homeomorphic with either $[0, 1]^m \times (0, 1)^n$ or $[0, 1]^m \times [0, 1)$. The various possibilities indicated are all topologically distinct.*

Множество $s = (0, 1)^{\mathbb{N}}$ называется **псевдовнутренностью**, а $Q \setminus s$ называется **псевдограницей** гильбертова куба Q .

Теорема 4.26 (Т.А. Chapman (1972 [63], [64, Sec. 25])). *Для компактов $X, Y \subset s \subset Q$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) Дополнения $Q \setminus X$ и $Q \setminus Y$ компактов гомеоморфны
- $\text{Sh}(X) = \text{Sh}(Y)$, т.е. компакты X и Y шейпово эквивалентны.

В 1980 году Henrik Toruńczyk [65] дал топологическую характеристику гильбертова куба Q . The notion of a Z -set, introduced by R.D. Anderson in 1966 [66], has played a key role in the study of infinite-dimensional manifolds.

Теорема 4.27. Для метризуемого компакта X следующие условия эквивалентны:

- (1) X гомеоморфно гильбертову кубу Q ;
- (2) X является AR -компактом и тождественное отображение X является равномерным пределом Z -отображений;
- (3) X является AR -компактом и для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие отображения $f_\varepsilon, g_\varepsilon: X \rightarrow X$, что $f_\varepsilon(X) \cap g_\varepsilon(X) = \emptyset$ и $|\text{Id}_X - f_\varepsilon| < \varepsilon$, $|\text{Id}_X - g_\varepsilon| < \varepsilon$;
- (4) X является AR -компактом и в пространстве $C(Q \times D, X)$ подмножество $\{f \in C(Q \times D, X): f(Q \times \{0\}) \cap f(Q \times \{1\}) = \emptyset\}$ всюду плотно;
- (5) X является AR -компактом и для всякого $n = 0, 1, \dots$, в пространстве $C(I^n \times D, X)$ подмножество $\{f \in C(I^n \times D, X): f(I^n \times \{0\}) \cap f(I^n \times \{1\}) = \emptyset\}$ всюду плотно.

Теорема 4.28 (R.D. Anderson (1966 [66])). Гильбертово пространство ℓ_2^∞ и псевдовнутренность гильбертова куба $s = (0, 1)^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфны.

В 1967 году М.И. Кадец [67] дал теореме Андерсона окончательную формулировку.

Теорема 4.29 ([62, предложение 1.5.30]). Каждое бесконечномерное сепарабельное пространство Фреше (Банаха) X гомеоморфно гильбертову пространству ℓ_2^∞ .

Теорема 4.30 ([62, предложение 1.3.28]). У всякого замкнутого σ -компактного подмножества $X \subset \ell_2^\infty$ дополнение $\ell_2^\infty \setminus X$ гомеоморфно всему гильбертову пространству ℓ_2^∞ .

Теперь мы перейдем к понятиям и результатам, которые позволят понять и применять теорему Торунчика 4.27.

4.12 * Абсолютные (окрестностные) экстензоры [ретракты].

Пусть $A \subset X$ – произвольное подмножество топологического пространства X . В топологии важное значение имеет возможность продолжения заданного непрерывного отображения $h: A \rightarrow Y$ в некоторое топологическое пространство Y до непрерывного отображения некоторого большего подмножества $A \subset B \subset X$. Эта задача распадается на две части.

1. Продолжение на замыкание $\bar{A}$ множества A . Если такое продолжение возможно, то оно единственно и его существование определяется равномерными свойствами отображения h .
2. Продолжение с замкнутого множества $\bar{A}$ на все пространство X (на объемлющее пространство B).

Все допустимые метрики на метризуемом компакте X равномерно эквивалентны друг другу, поэтому корректно говорить о равномерности на метризуемом компакте X . Поэтому же корректно говорить о равномерности на четко фиксированном подмножестве компакта X .

Предложение 4.31. Для непрерывного отображения $h: A \rightarrow Y$ подмножества компактного метризуемого пространства X в полно метризованное пространство Y следующие условия эквивалентны:

- (1) существует непрерывное продолжение $H: \bar{A} \rightarrow Y$;
- (2) отображение $h: A \rightarrow Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство. 1) $\implies$ 2). Так как замкнутое множество $\bar{A}$ компактно, то непрерывное отображение H равномерно непрерывно. Тогда равномерно непрерывно и его ограничение h .

2) $\implies$ 1). Как сказано выше, все допустимые метрики на X равномерно эквивалентны друг другу. Зафиксируем произвольные допустимые метрики на X и Y .

Пусть $x \in \bar{A}$. Выберем произвольную последовательность $x_n \in A$, сходящуюся к x . Так как сходящаяся последовательность фундаментальна, а образ фундаментальной последовательности при равномерно непрерывном отображении тоже является фундаментальной последовательностью, то $h(x_n)$ – фундаментальна. Так как компактное метрическое пространство является полным, то последовательность $h(x_n)$ сходится. Положим $H(x) = \lim h(x_n)$. Данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора последовательности $x_n \rightarrow x$ (в самом

деле, если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow x$, то и последовательность $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ сходится к x ; если $\lim h(z_n) = a$, то и $\lim h(x_n) = \lim h(y_n) = a$ как пределы подпоследовательностей сходящейся последовательности).

Покажем, что построенное отображение H является продолжением h . В самом деле, если $x \in A$, то в качестве последовательности $x_n \rightarrow x$, $x_n \in A$, можно взять последовательность $x_n = x$ для любого n . Таким образом, $H(x) = h(x)$ при $x \in A$.

Покажем, что построенное отображение H является равномерно непрерывным. Так как отображение h равномерно непрерывно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что, для любых $x, y \in A$ из неравенства $|xy| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|h(x)h(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Возьмём произвольные $x, y \in \bar{A}$, такие, что $|xy| < \frac{1}{4}\delta(\varepsilon)$. Возьмём произвольные две последовательности $x_n \in A$, $y_n \in A$, такие, что $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Возьмём такой номер N , что для любого $n > N$ выполняются неравенства $|x_n x| < \frac{1}{4}\delta(\varepsilon)$, $|y_n y| < \frac{1}{4}\delta(\varepsilon)$. Тогда для любого $n > N$ имеем $|x_n y_n| \leq |x_n x| + |xy| + |yy_n| < \frac{3}{4}\delta(\varepsilon)$. Следовательно, $|H(x_n)H(y_n)| = |h(x_n)h(y_n)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда переходя в неравенстве $|H(x)H(y)| \leq |H(x)H(x_n)| + |H(x_n)H(y_n)| + |H(y_n)H(y)|$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $|H(x)H(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. $\square$

Так как исторически Карол Борсук, поставивший и решавший первым задачу продолжения в общем контексте, свел задачу экстензорности к её частному случаю (задаче ретракции) и употреблял термины **абсолютный (окрестностный) ретракт**, то именно эта терминология и символика используется теперь как основные.

Для ознакомления с основными фактами теории ретрактов, особенно в категории метризуемых компактов, желающие могут обратиться к монографии К. Борсука [68].

Метризуемое пространство Y называется **абсолютным (окрестностным) экстензором** $Y \in A(N)E(\mathfrak{M})$ для класса метрических пространств $\mathfrak{M}$, если у всякого непрерывного отображения $h: A \rightarrow Y$, заданного на замкнутом подмножестве $A = \bar{A} \subset X$ произвольного метризуемого пространства X , существует непрерывное продолжение $H: X \rightarrow Y$ на все пространство X (продолжение $H: U(A) \rightarrow Y$ на некоторую окрестность $U(A)$ множества A в пространстве X).

Предложение 4.32. Если подмножество $Y \subset Z$ хаусдорфова пространства Z является его ретрактом, т.е. если существует такое непрерывное отображение $r: Z \rightarrow Y$, что $r(y) = y$ для всякой точки $y \in Y$, то $Y = \bar{Y}$.

Доказательство. Покажем, что дополнение к множеству Y открыто. Пусть $z \in Z \setminus Y$. Тогда $y = r(z) \in Y$, поэтому $y \neq z$. Следовательно существуют такие окрестности U_z и U_y , что $U_z \cap U_y = \emptyset$. Согласно непрерывности ретракции r существует такая окрестность $V_z \subset U_z$, что $r(V_z) \subset U_y$. Тогда $V_z \cap r(V_z) = \emptyset$, поэтому $V_z \cap Y = \emptyset$. $\square$

Метризуемое пространство Y называется **абсолютным (окрестностным) ретрактом** $Y \in A(N)R(\mathfrak{M})$ для класса метрических пространств $\mathfrak{M}$, если для всякого непрерывного замкнутого вложения $i: Y \rightarrow Z$ в произвольное метризуемое пространство Z множество $i(Y) = \bar{i(Y)}$ является ретрактом всего пространства Z (является ретрактом некоторой своей окрестности $U(i(Y))$ в Z). Требование $i(Y) = \bar{i(Y)} \subset Z$ необходимое.

В 1915 году Н. Tietze показал [69], что всякая действительная непрерывная функция, определенная на замкнутом подмножестве метрического пространства Z , может быть продолжена до действительной непрерывной функции, определенной на всем Z . П.С. Урысон показал, что в теореме Титце достаточно предполагать нормальность пространства Z . Более того, для T_1 -пространства Z возможность продолжения всякой непрерывной функции со всякого замкнутого подмножества $A \subset Z$ до непрерывной функции, определенной на некоторой окрестности множества A , эквивалентна нормальности пространства Z . В вышеприведенной терминологии это означает, что действительная прямая является абсолютным экстензором в классе нормальных пространств и более того, если прямая является абсолютным окрестностным экстензором для T_1 -пространства Z , то Z нормально. В 1951 J. Dugundji расширил теорему Титце, заменив в ней прямую на произвольное действительное нормированное пространство [70, Theorem 4.1], [68, Theorem 7.1].

Теорема 4.33. Пусть A – замкнутое подмножество метрического пространства Z , а Y – локально выпуклое пространство. Тогда всякое непрерывное отображение $h: A \rightarrow Y$ имеет непрерывное продолжение $H: Z \rightarrow Y$. Более того, все значения этого продолжения H могут быть взяты из выпуклой оболочки $\text{conv}(h(A))$ множества $h(A)$.

Теорема 4.34 (К. Kuratowski, М. Woldyslawski). Для всякого ограниченного метрического пространства X отображение $i: X \rightarrow C_b(X)$, заданное формулой $i(x)(y) = |xy|$, является изометрическим вложением X в банахово пространство $C_b(X)$.

Более того, множество $i(X)$ замкнуто в своей выпуклой оболочке $\text{conv}(i(X))$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{conv}(i(X))$ и $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n)$. Так как $\varphi \in \text{conv}(i(X))$, то существуют такие попарно различные точки $a_1, \dots, a_k \in X$, что

$$\varphi = \sum_{j=1}^k \lambda_j i(a_j), \text{ где } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ и } \lambda_j > 0, j = 1, \dots, k.$$

Рассмотрим для упрощения обозначений коэффициент $\lambda_1 > 0$. Тогда

$$\|\varphi - i(x_n)\| \geq |\varphi(x_n) - i(x_n)(x_n)| = |\varphi(x_n)| = \sum_{j=1}^k \lambda_j i(a_j)(x_n) \geq \lambda_1 i(a_1)(x_n) = \lambda_1 |a_1 x_n|.$$

Из равенства $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n)$ следует, что $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Следовательно $k = 1$ и $\varphi = i(a_1)$. $\square$

Следствие 4.35. Для метризуемого пространства Y условия $Y \in A(N)E(\mathfrak{M})$ и $Y \in A(N)R(\mathfrak{M})$ эквивалентны.

Доказательство. Содержательной является импликация $Y \in A(N)R(\mathfrak{M}) \implies Y \in A(N)E(\mathfrak{M})$.

Рассмотрим замкнутое вложение $i: Y \rightarrow \text{conv}(i(Y))$ из теоремы Куратовского–Войдыславского 4.34. Согласно условию имеется ретракция $r: \text{conv}(i(Y)) \rightarrow i(Y)$. Пусть $h: A \rightarrow Y = i(Y)$ – непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве метрического пространства Z . Согласно теореме Дугунджи 4.33 имеется продолжение $\tilde{H}: Z \rightarrow \text{conv}(i(Y))$. Отображение $H = r \circ \tilde{H}: Z \rightarrow i(Y)$ является требуемым продолжением. $\square$

В случае компактных пространств имеется более сильный вариант эквивалентности экстензорности и ретрактности.

Теорема 4.36. Для компактного пространства Y бесконечного веса τ следующие условия эквивалентны.

- (1) Пространство Y является абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе компактных пространств веса τ .
- (2) Пространство Y является абсолютным (окрестностным) эктензором в классе всех нормальных пространств.

Доказательство. Содержательной является импликация 1) $\implies$ 2).

Рассмотрим замкнутое вложение $i: Y \rightarrow I^\tau$ в тихоновский куб веса τ . Согласно условию имеется ретракция $r: I^\tau \rightarrow i(Y)$. Пусть $h: A \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве нормального пространства Z . Согласно теоремам Урысона и произведения 4.37 имеется продолжение $\tilde{H}: Z \rightarrow I^\tau$. Отображение $H = r \circ \tilde{H}: Z \rightarrow i(Y)$ является требуемым продолжением. $\square$

Теорема 4.37. Для класса пространств $\mathcal{K}$ и семейства пространств Y_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, следующие условия эквивалентны.

- (1) Пространство $Y = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha \in AE(\mathcal{K})$.
- (2) Пространства $Y_\alpha \in AE(\mathcal{K})$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Так как всякое пространство Y_α является ретрактом произведения Y , то импликация 1) $\implies$ 2) получается повторением доказательства следствия 4.35 и теоремы 4.36.

2) $\implies$ 1). Для всякого $\alpha \in \mathcal{A}$ рассмотрим ретракцию (проекцию) $p_\alpha: Y \rightarrow Y_\alpha$. Пусть $h: A \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве нормального пространства Z . Согласно условию для всякого $\alpha \in \mathcal{A}$ у отображения $h_\alpha = p_\alpha \circ h: A \rightarrow Y_\alpha$ имеется продолжение $H_\alpha: Z \rightarrow Y_\alpha$. Отображение $H = \Delta_{\alpha \in \mathcal{A}} H_\alpha: Z \rightarrow Y$ является требуемым продолжением. $\square$

Под гильбертовым кубом понимается метризуемый компакт

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 2^{-i}].$$

Следствие 4.38. Гильбертов куб Q является AR -компактом.

Как уже указывалось в цитате В.В. Федорчука, классы ANR -пространств выдерживают различные операции – например склейку. Поэтому все конечные полиэдры и многообразия являются ANR -пространствами.

Кроме того, из леммы Борсука о грибе (о шляпе, о котелке) следует, что задача продолжения отображения в ANR -пространство зависит не от самого продолжаемого отображения, а только от его гомотопического типа. Поэтому справедлива

Теорема 4.39. *Для метризуемого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

- (1) $Y \in AE(\mathfrak{M})$;
- (2) $Y \in ANR(\mathfrak{M})$ и Y стягиваемо по себе в точку;
- (3) $Y \in ANR(\mathfrak{M})$ и всякое отображение всякой сферы S^n , $n = 0, 1, \dots$, в Y гомотопно отображению в точку.

4.13 Z -множества и строгие Z -множества.

A closed set A in a space X is called a **Z -set** in X if, for each $\lambda \in \text{cov}(X)$, there is a map $f: X \rightarrow X \setminus A$ that is λ -close to Id_X . If $A \cap \text{cl}_X f(X) = \emptyset$ in the above, A is called a **strong Z -set** in X . A countable union of Z -sets (resp. strong Z -sets) is called a Z_σ -set (resp. **strong Z_σ -set**). Every closed subset of a (strong) Z -set is also a (strong) Z -set and every F_σ -set contained in a (strong) Z_σ -set is a (strong) Z_σ -set. Obviously a strong Z -set is a Z -set. The converse is also true in a locally compact paracompact space, that is:

Предложение 4.40. *Every Z -set in a locally compact paracompact space X is a strong Z -set. In particular, every Z -set in a Q -manifold is a strong Z -set.*

Предложение 4.41. *Every E -deficient closed (or Z_σ) set in an E -stable space is a strong Z -set (or a strong Z_σ -set).*

A subset U of a space X said to be **homotopy dense in X** if there exists a homotopy $h: X \times I \rightarrow X$ such that $h_0 = \text{Id}_X$ and $h(X \times (0, 1]) \subset U$.

Теорема 4.42. *For a closed set A in an $X \in ANR$, the following are equivalent:*

- (a) A is a Z -set in X ;
- (b) For each $\varepsilon > 0$, each map $f: Q \rightarrow X$ is ε -close to a map $g: Q \rightarrow X \setminus A$ with respect to any given metric $d \in \text{Metr}(X)$;
- (c) A is a Z_∞ -set in X ;
- (d) For an arbitrary simplicial complex K and any $\lambda \in \text{cov}(X)$, each map $f: |K| \rightarrow X$ is λ -close to a map $g: |K| \rightarrow X \setminus A$;
- (e) for a finite simplicial complex K and any $\lambda \in \text{cov}(X)$, each map $f: |K| \rightarrow X$ is λ -close to a map $g: |K| \rightarrow X \setminus A$;
- (f) The inclusion $X \setminus A \subset X$ is a hereditary weak homotopy equivalence, i.e., for every open set U in X , the inclusion $U \setminus A \subset U$ is a weak homotopy equivalence;
- (g) For every open set U in X , the inclusion $X \setminus A \subset X$ is a homotopy equivalence;
- (h) $X \setminus A$ is homotopy dense in X ;
- (i) $X \setminus A$ is dense in X and, for each $a \in A$, each neighborhood U of a in X contains a neighborhood V in X such that every map $\alpha: S^{n-1} \rightarrow V \setminus A$ is null-homotopic in $U \setminus A$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.43.

For a closed set A in Q , the following are equivalent:

- (a) A is a Z -set in Q ;
- (b) A is Q -deficient in Q ;

(c) There exists a homeomorphism $h: Q \rightarrow Q$ such that $h(A) \subset s$;

(d) For each $\varepsilon > 0$, there exists a homeomorphism $h: Q \rightarrow Q$ such that $h(A) \subset s$ and $d(h, \text{Id}_Q) < \varepsilon$.

Следствие 4.44. *Every homeomorphism $h: A \rightarrow B$ between Z -sets in Q can be extended to a homeomorphism $\tilde{h}: Q \rightarrow Q$.*

Следствие 4.45. *Every homeomorphism $h: A \rightarrow B$ between Z -sets in $Q \setminus 0$ can be extended to a homeomorphism $\tilde{h}: Q \setminus 0 \rightarrow Q \setminus 0$.*

Теорема 4.46. *Let M and N be Q -manifolds. For each homotopy equivalence $f: M \rightarrow N$, there exists a homeomorphism $h: M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow N \times \mathbb{R}^+$ such that $\text{pr}_N h \simeq f \text{pr}_M$.*

For each map $f: X \rightarrow Y$, we define

$$N(f) = \{y \in Y: f^{-1}(y) \text{ is non-degenerate}\}.$$

Предложение 4.47. *Let $f: M \rightarrow X$ be a cell-like map from a Q -manifold M onto an ANR X . If $f^{-1}(N(f))$ is contained in a Z -set A in M , then f is a near-homeomorphism and $f(A)$ is a Z -set in X (hence so is $\text{cl}N(f)$).*

Теорема 4.48 (Т.А. Chapman (1972 [63], [64, Sec. 25])). *Для компактов $X, Y \subset Q$, являющихся Z -множествами в Q , следующие условия эквивалентны:*

- (1) Дополнения $Q \setminus X$ и $Q \setminus Y$ компактов гомотопичны;
- (2) $\text{Sh}(X) = \text{Sh}(Y)$, т.е. компакты X и Y шейпово эквивалентны.

4.14 Степенной функтор.

Многие функторы F обладают тем свойством, что имеется естественное отображение вложения $i: X \rightarrow F(X)$. Например, как мы уже отмечали выше, таким является любой нормальный функтор на категории компактных пространств.

Справедлива и известна теорема о том, что для множеств

$$|X| = |Y| \iff |X^2| = |Y^2|.$$

Вопрос о восстановимости кардинала $|X|$ по кардиналу $2^{|X|}$ не столь очевиден как может показаться по интуиции созданной конечными множествами.

2. При $n \geq 3$ во внутренности n -мерного куба I^n имеется такой дико вложенный отрезок $\Gamma \subset \text{Int } I^n \subset I^n$, что

$$I^n/\Gamma \not\cong I^n, \text{ но } (I^n/\Gamma)^2 \cong I^{2n}; \quad \mathbb{R}^n/\Gamma \not\cong \mathbb{R}^n, \text{ но } (\mathbb{R}^n/\Gamma)^2 \cong \mathbb{R}^{2n}.$$

Некоторые функторы “помнят” о структуре произведения. К таким функторам можно отнести функтор симметричной степени и особенно функтор всех отдельно непрерывных функций.

М.М. Магђановић и А.Р. Вућ емилиовић предложили [72] два таких счетных метризуемых пространства, которые сами не гомотопичны, но квадраты которых гомотопичны.

Для пространств X и Y описать свойства множеств $S_{X,Y}^\times = \{(n, m): X^n \cong Y^m\}$ и $S_{X,Y}^+ = \{(n, m): nX \cong mY\}$. Интересно было бы описать все так получаемые множества для пар пространств из заданного класса пространств. Ясно, что если такое множество содержит пару $(1, 2)$, то оно содержит все пары. Если для пространств X и X оба множества содержат пару $(1, 2)$, то и для пространств $\text{exp } X$ и $\text{exp } X$ оба множества содержат пару $(1, 2)$.

Перейдем к гиперпространству замкнутых множеств.

4.15 Континуумы Пеано.

A space is said to be **locally connected** provided that each of its points has a neighborhood base of connected, open sets. A locally connected continuum is often called a **Peano continuum** in honor of Giuseppe Peano: in 1890, Peano gave the first example of a space-filling curve, namely, a continuous function of the closed interval $I = [0, 1]$ onto the square I^2 . В 1914 году Н. Hahn, в 1913 и 1920 годах S. Mazurkiewicz и в 1920 году W. Sierpiński доказали эквивалентность нижеследующих условий 1) и 2).

Теорема 4.49. *Для метризуемого компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X связно и локально связно;
- (2) X является непрерывным образом отрезка I .

There are two natural ways to localize connectedness: Let X be a topological space, and let $x \in X$; X is locally connected at x provided that x has a neighborhood base of connected, open neighborhoods; X is **connected im kleinen** (cik) at x provided that x has a neighborhood base of connected neighborhoods (that is, connected sets that contain x in their interiors in X). It is obvious that if X is locally connected at x , then X is cik at x . However, the converse is false even for continua.

Nevertheless, if a topological space is cik at every point, then it is locally connected at every point.

A convex metric for a space X is a metric, d , for X that induces the topology on X and for which midpoints always exist: for any $x, y \in X$, there exists $m \in X$ such that

$$d(x, m) = d(m, y) = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Теорема 4.50. *Для метризуемого компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X связно и локально связно;
- (2) топология на X задается выпуклой метрикой.

Convex metrics were first studied by Menger [88]. The theorem 4.50, which is due to Bing [89] and Moise [90], answered a question in [88]. The convexity of the Hausdorff metric has been studied by Duda in [91] and [92] (regarding the problems in [91, p. 331] see 4.5 and 4.6 of [92]). Let us note a few elementary properties of convex metrics. We will use

Теорема 4.51. *Для выпуклой метрики d на компакте X для $r > 0$ и любых $A, C \in \exp X$ справедливо неравенство*

$$d_H(B(A, r), B(C, r)) \leq d_H(A, C).$$

4.16 Функторы гиперпространств $\exp X$ и $\exp^c X$.

Процитируем монографию Alejandro Illanes and Sam B. Nadler, Jr. “Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances” (1999 [73, p. 75-76]):

“In Poland in the early 1920’s, it was conjectured that 2^I is the Hilbert cube, where $I = [0, 1]$. The conjecture first appeared in print in 1938 [95]. There were compelling reasons to believe the conjecture; nevertheless, for many years a proof eluded everyone who worked on it. Finally, in the 1970’s, Schori and West proved that 2^I is, indeed, the Hilbert cube ([93] and [86]). They went on to extend their result to 2^X when X is any finite graph [94]. Returning to 1938, Wojdyslawski [95] asked the following question: Is 2^X the Hilbert cube whenever X is a (nondegenerate) Peano continuum? We remark that the question was restricted to Peano continua because they are the only continua X for which 2^X is a Peano continuum ([33] and [34]). In 1939, Wojdyslawski provided strong evidence in support of an affirmative answer to his question; he proved that for any Peano continuum X , 2^X and $\exp^c X$ are absolute retracts [96]. And there the matter rested - for over thirty years - until Schori and West proved their result about 2^I (mentioned above).

Then, in 1974 and 1978, Curtis and Schori published their landmark papers ([98] and [99]). They answered Wojdyslawski’s question (affirmatively), and they obtained two definitive results about $\exp^c X$. Their results are as follows (where X is a nondegenerate Peano continuum): 2^X is the Hilbert cube; $\exp^c X$ is the Hilbert cube in the only situation when it could be, namely, when every arc in X has empty interior in X ; and $\exp^c X$ is a Hilbert cube factor (i.e., $\exp^c X \times Q \cong Q$, where Q denotes the Hilbert cube). These results led to similar results for containment hyperspaces ([98], [99, p. 241]). We note that the results about $\exp^c X$ were proved for a special case in an earlier paper by West [97].

The Curtis–Schori–West techniques of proof involve the delicate use of inverse limits, subtle and complicated maneuvers with refinements of partitions, and what were, at the time, fairly new results about infinite-dimensional topology. But, the Curtis–Schori papers are not the end of our story. Enter H. Toruńczyk, who was hard at work in the mid 1970’s trying to characterize Hilbert cube manifolds. I remember the day when a preprint of Toruńczyk’s results was received in the mail by a renowned topologist. The first reaction was “This can’t be right - we prove the

converse the first day of class,” which was followed five hours later with “By God, it is right!” At the end of the paper, Toruńczyk gave an elegant proof of the Curtis-Schori result for 2^X as an application of his characterization theorem, see [100]. This brings us to the purpose of this chapter — proving the first two Curtis-Schori results mentioned above using Toruńczyk’s theorem.”

“В Польше в начале 1920-х годов было выдвинуто предположение, что 2^I является кубом Гильберта, где $I = [0, 1]$. Это предположение впервые появилось в печати в 1938 году [95]. Были веские основания верить этому предположению; тем не менее, в течение многих лет доказательство ускользало от всех, кто над ним работал. Наконец, в 1970-х годах Шори и Вест доказали, что 2^I действительно является кубом Гильберта ([93] и [86]). Они распространили свой результат на 2^X , когда X — любой конечный граф [94]. Возвращаясь к 1938 году, Войдыславский [95] задал следующий вопрос: Является ли 2^X кубом Гильберта всякий раз, когда X — (невырожденный) континуум Пеано? Отметим, что вопрос был ограничен континуумами Пеано, поскольку это единственные континуумы X , для которых 2^X является континуумом Пеано ([33] и [34]). В 1939 году Войдыславский представил убедительные доказательства в поддержку утвердительного ответа на свой вопрос; он доказал, что для любого континуума Пеано X , 2^X и $\exp^c X$ являются абсолютными ретрактами [96]. И на этом дело остановилось — более чем на тридцать лет — пока Шори и Вест не доказали свой результат о 2^I (упомянутый выше).

Затем, в 1974 и 1978 годах, Кертис и Шори опубликовали свои знаковые работы ([98] и [99]). Они ответили на вопрос Войдыславского (утвердительно) и получили два окончательных результата о $\exp^c X$. Их результаты следующие (где X — невырожденный континуум Пеано): 2^X — куб Гильберта; $\exp^c X$ — куб Гильберта в единственном возможном случае, а именно, когда каждая дуга в X имеет пустую внутренность в X ; и $\exp^c X$ — фактор куба Гильберта (т.е., $\exp^c X \times Q \cong Q$, где Q обозначает куб Гильберта). Эти результаты привели к аналогичным результатам для гиперпространств включения ([98], [99, с. 241]). Отметим, что результаты об $\exp^c X$ были доказаны для частного случая в более ранней работе Веста [97].

Методы доказательства Кертиса–Шори–Уэста включают в себя деликатное использование обратных пределов, тонкие и сложные маневры с уточнениями разбиений, и относительно новые на тот момент результаты о бесконечномерной топологии. Но работы Кертиса–Шори — это не конец нашей истории. Появляется Х. Торунчик, который в середине 1970-х годов усердно работал над характеристикой многообразий над гильбертовым кубом. Я помню день, когда известный тополог получил по почте препринт результатов Торунчика. Первая реакция была: “Этого не может быть — мы доказываем обратное в первый день занятий”, а через пять часов последовало: “Боже мой, это правильно!” В конце статьи Торунчик представил элегантное доказательство результата Кертиса–Шори для 2^X в качестве применения своей теоремы о характеристике, см. [100]. Это подводит нас к цели данной главы — доказательству первых двух результатов Кертиса–Шори, упомянутых выше, с помощью теоремы Торунчика.”

Теорема 4.52. *Для метризуемого компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X связно и локально связно;
- (3) $\exp X$ связно и локально связно;
- (4) $\exp X$ гомеоморфно гильбертову кубу $Q = I^{\mathbb{N}}$;
- (5) $\exp^c X$ связно и локально связно;
- (6) $\exp^c X$ является абсолютным ретрактом.

Теорема 4.53. *Для метризуемого компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X связно, локально связно и не имеет свободных дуг;
- (2) $\exp^c X$ гомеоморфно гильбертову кубу $Q = I^{\mathbb{N}}$.

Дуга (отрезок) в компакте называется **свободной**, если её внутренний интервал открыт в этом компакте.

Приведенные теоремы показывают, что континуум Пеано X (без свободных дуг) не восстанавливается по своим гиперпространствам $\exp X$ и $\exp^c X$. Более того, для континуума Пеано X топологический тип гиперпространства $\exp X \cong Q$ не дает дополнительной информации о первоначальном пространстве X .

Легко дать пример функтора, который позволяет восстановить пространство.

Теорема 4.54. *Если для объектов $X, Y \in \mathcal{K}$ и функтора $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ имеются (естественные) вложения $X \subset F(X)$ и $Y \subset F(Y)$, то $X \cong Y$ тогда и только тогда, когда $(F(X), X) \cong (F(Y), Y)$. Здесь первая эквивалентность понимается в категории $\mathcal{K}$, а вторая в категории $\mathcal{K}^2$ пар объектов категории $\mathcal{K}$.*

Сформулированное утверждение очевидно и бессодержательно, если его оставить в приведенном виде. Но оно служит отправной точкой для многих вопросов, если пару объектов $(F(X), X)$ преобразовать. Такими естественными преобразованиями служат следующие три – переход к дополнению $F(X) \setminus X$, переход к факторпространству $F(X)/X$ и переход к отмеченному факторпространству $(F(X)/X, \{X\})$. Кроме того, можно рассмотреть функтор $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ в другую категорию и рассмотреть пару $(F(X), G(X))$ для некоторого подфунктора $G \subset F$. Подчеркнем, что переход к дополнению $F(X) \setminus X$ имеет не функториальный характер, так как точки из $F(X) \setminus X$ часто попадают в Y .

Теорема 4.55. *Для компакта Пеано X компакт $\text{exp}_1 X \cong X$ является Z -множеством в $\text{exp } X \cong Q$.*

Применением теоремы Чэпмана 4.48 к гиперпространству получается

Теорема 4.56. *Для континуумов Пеано X и Y следующие условия эквивалентны:*

- (1) *их канонические дополнения $\text{exp } X \setminus X$ и $\text{exp } Y \setminus Y$ гомеоморфны;*
- (2) $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$.

Доказательство. Согласно теореме 4.52 в предположениях теоремы $\text{exp } X \cong Q \cong \text{exp } Y$. Согласно теореме 4.55 компакты $X = \text{exp}_1 X$ и $Y = \text{exp}_1 Y$ являются Z -множествами в своих экспонентах, поэтому применима теорема 4.48. $\square$

Для топологического пространства X через $\mathcal{I}(X)$ обозначим множество всех изолированных точек пространства X . Множество $\mathcal{I}(X)$ открыто в X ; его дополнение $X' = X \setminus \mathcal{I}(X)$ замкнуто в X , называется **производным** пространства X и состоит из всех неизолированных точек в X .

Нам понадобится теорема Пелчинского о продолжении гомеоморфизма.

Теорема 4.57 (A. Pełczyński (1965 [77, p. 85])). *Let X and Y be infinite compact metric spaces. Let us suppose that $\mathcal{I}(X)$ is dense in X and $\mathcal{I}(Y)$ is dense in Y . Then every homeomorphism h from X' onto Y' can be extended to a homeomorphism from X onto Y .*

Предложение 4.58 (A. Pełczyński (1965 [77, Lemma 1])). *Естественные вложения $\mathcal{I}(X) \subset X$ и $X = \text{exp}_1 X \subset \text{exp } X$ индуцируют естественное вложение $\mathcal{I}(X) = \text{exp}_1 \mathcal{I}(X) \subset \text{exp } \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\text{exp } X)$.*

Предложение 4.59. *Для непустых компактов X и Z и их дискретного объединения $Y = X \sqcup Z$ имеется естественное представление $\text{exp } Y = \text{exp } X \sqcup \text{exp } Z \sqcup \text{exp } X \times \text{exp } Z$.*

We say that metric spaces (X, ϱ_X) and (Y, ϱ_Y) are **uniformly homeomorphic** if there is a homeomorphism $f: X \rightarrow Y$ such that f and f^{-1} are both uniformly continuous maps with respect to the corresponding metrics.

Определение 4.60. Будем называть непустой метризуемый компакт X **исключительным**, если множество его изолированных точек $\mathcal{I}(X)$ пусто, а пространства $\text{exp } X \setminus X$ и $(\text{exp } X \setminus X) \sqcup \text{exp } X$ равномерно гомеоморфны.

Во избежание повтора рассуждений отложим описание свойств исключительных компактов.

Результат M. Alonso-Morón and A. G. Gómez 2006 года [78] становится более выпуклым именно при категорном взгляде на него и сравнении его с другими близкими результатами.

Теорема 4.61. *Для непустых метризуемых компактов X и Y следующие условия эквивалентны:*

- (1) *канонические дополнения $\text{exp } X \setminus \text{exp}_1 X$ и $\text{exp } Y \setminus \text{exp}_1 Y$ равномерно гомеоморфны;*
- (2) *компакты X и Y гомеоморфны или один из них является исключительным, а второй получается дискретным объединением этого исключительного компакта и точки.*

Доказательство. 2) $\implies$ 1). Пусть компакты X и Y гомеоморфны. Гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$ порождает гомеоморфизм $\text{exp}(f): (\text{exp } X, \text{exp}_1 X) \rightarrow (\text{exp } Y, \text{exp}_1 Y)$. Так как пространства $\text{exp } X$ и $\text{exp } Y$ компактны, то гомеоморфизмы $\text{exp}(f)$ и $\text{exp}(f^{-1}) = (\text{exp}(f))^{-1}$ равномерно непрерывны. Следовательно равномерно непрерывны и их ограничения на дополнения.

Пусть компакт X является исключительным и $Y = X \sqcup \{pt\}$. Согласно предложению 4.59 $\text{exp } Y = \text{exp } X \sqcup \text{exp}\{pt\} \sqcup \text{exp } X \times \text{exp}\{pt\} = \text{exp } X \sqcup \{pt\} \sqcup \text{exp } X \times \{pt\}$. Следовательно $\text{exp } Y \setminus Y = (\text{exp } X \setminus X) \sqcup \text{exp } X$. Последнее пространство равномерно гомеоморфно пространству $\text{exp } X \setminus X$ в силу исключительности компакта X .

1) $\implies$ 2). Пусть задан двусторонне равномерный гомеоморфизм $h: \exp X \setminus X \rightarrow \exp Y \setminus Y$. Пополнением $\exp X \setminus X$ является его замыкание, которое естественным образом отождествляется с множеством $\exp X \setminus \mathcal{I}(X)$. Согласно предложению 4.31 существует продолжение $H: \exp X \setminus \mathcal{I}(X) \rightarrow \overline{\exp Y \setminus Y} = \exp Y \setminus \mathcal{I}(Y)$. Продолжение H является двусторонне равномерно непрерывным. Поэтому отображение H является биекцией. Следовательно $H(X') = Y'$ и ограничение H на X' является гомеоморфизмом. Осталось продолжить гомеоморфизм $H|_{X'}: X' \rightarrow Y'$ до гомеоморфизма X на Y .

При гомеоморфизме изолированные точки переходят в изолированные. Поэтому $h(\exp \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{I}(X)) = \exp \mathcal{I}(Y) \setminus \mathcal{I}(Y)$. Если $|\mathcal{I}(X)| = n < \infty$, то $|\exp \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{I}(X)| = 2^n - 1 - n$. Если $|\mathcal{I}(X)| = \aleph_0$, то $|\exp \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{I}(X)| = \aleph_0$. Других случаев не бывает, так как в сепарабельном метрическом пространстве не более счетного числа изолированных точек. Следовательно из конечности одного из множеств $\mathcal{I}(X)$ или $\mathcal{I}(Y)$ следует конечность другого. Из равенства $2^n - 1 - n = 2^m - 1 - m$ следует, что $n = m$ или $nm = 0$ и $n + m = 1$. Таким образом, из гомеоморфности пространств $\exp \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{I}(X)$ и $\exp \mathcal{I}(Y) \setminus \mathcal{I}(Y)$ следует, что множества $\mathcal{I}(X)$ и $\mathcal{I}(Y)$ равномошны или одно из них пусто, а другое одноточечно.

Пусть множества $\mathcal{I}(X)$ и $\mathcal{I}(Y)$ равномошны. Если они конечны, то любая их биекция определяет продолжающий гомеоморфизм $H: X \rightarrow Y$.

Если они счетны, то $\overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X) \neq \emptyset$. Фиксируем точку $x_0 \in \overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X) \subset X'$. Выберем такую последовательность точек $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}(X)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$. Тогда $H(x_0) = y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\{x_n, x_0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\})$. However $\{x_{2n-1}, x_{2n}\}$ is an isolated point in $\exp X \setminus X$, so $h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\})$ is also isolated in $\exp Y \setminus Y$. Choose now, for every $n \in \mathbb{N}$, a point $y_n \in h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\})$; then we have $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ in Y and y_n is an isolated point in Y for every $n \in \mathbb{N}$. This implies that if $x_0 \in \overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X)$ then $H(x_0) \in \overline{\mathcal{I}(Y)} \setminus \mathcal{I}(Y)$. Thus we have $H|_{\overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X)}: \overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X) \rightarrow \overline{\mathcal{I}(Y)} \setminus \mathcal{I}(Y)$ is a homeomorphism. Apply now Pełczyński's extension theorem to get a homeomorphism $\alpha: \overline{\mathcal{I}(X)} \rightarrow \overline{\mathcal{I}(Y)}$ which is an extension of $H|_{\overline{\mathcal{I}(X)} \setminus \mathcal{I}(X)}$.

Finally, $\hat{H}: (\exp X, X) \rightarrow (\exp Y, Y)$ defined by

$$\hat{H}(C) = \begin{cases} H(C), & \text{если } C \in (\exp X \setminus X) \cup X', \\ \alpha(C), & \text{если } C \in \overline{\mathcal{I}(X)}. \end{cases}$$

is a homeomorphism of pairs and consequently X is homeomorphic to Y .

Пусть $|\mathcal{I}(X)| = 0$ и $|\mathcal{I}(Y)| = 1$. Эти равенства означают, что компакт X не имеет изолированных точек, а $Y = Y' \sqcup \{pt\}$. Выше было доказано, что компакты $X' = X$ и Y' гомеоморфны. Следовательно имеет место представление $Y = X \sqcup \{pt\}$. Применение предложения 4.59 (как было в доказательстве импликации 2) $\implies$ 1)) показывает, что в рассматриваемом случае компакт X является специальным. $\square$

Теорема 4.62. *If X is a continuum, then $\exp X$, $\exp^c X$, $\exp X \setminus X$ and $\exp^c X \setminus X$ are arcwise connected.*

Предложение 4.63. 1. *У всякого исключительного компакта число компонент связности бесконечно.*

2. *Нульмерный компакт является исключительным тогда и только тогда, когда он гомеоморфен множеству Кантора $\mathcal{C}$.*

Доказательство. 1. Пусть $X = \sqcup_{i=1}^k X_i$, где каждый компакт X_i , $i = 1, \dots, k$, нетривиален и связан. Так как компоненты связности компакта являются его квази компонентами (пересечением открыто-замкнутых подмножеств), то все компоненты X_i открыто-замкнуты. Согласно предложению 4.59

$$\exp X = \sqcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} \exp X_{i_1} \times \dots \times \exp X_{i_r} \quad \text{и} \quad \exp(X \sqcup \{pt\}) =$$

$$\sqcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} \exp X_{i_1} \times \dots \times \exp X_{i_r} \sqcup \{pt\} \sqcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} \exp X_{i_1} \times \dots \times \exp X_{i_r} \times \{pt\}.$$

Согласно теореме 4.62 пространство $\exp X \setminus X$ имеет $2^k - 1 - k$ компактных компонент связности и k некомпактных компонент связности.

Пространство $\exp(X \sqcup \{pt\}) \setminus (X \sqcup \{pt\})$ имеет $2^k - 1 - k + 2^k - 1$ компактных компонент связности. Следовательно эти два пространства не могут быть даже гомеоморфны.

2. Так как в исключительном компакте нет изолированных точек, то по теореме Брауэра 4.14 нульмерный исключительный компакт гомеоморфен множеству Кантора.

Покажем, что компакт Кантора $\mathcal{C}$ является исключительным. Экспонента $\exp \mathcal{C}$ также является множеством Кантора, в котором выделено меньшее множество Кантора, которое не является открытым подмножеством. Согласно следствию 4.16 дополнение $\exp \mathcal{C} \setminus \exp_1 \mathcal{C}$ гомеоморфно дополнению в множестве Кантора к точке. Но нас

интересуют классы равномерно гомеоморфных дополнений. Возьмем точку $x_0 \in \text{exp } C \setminus \text{exp}_1 C$. Из нульмерности множества Кантора следует, что у точки x_0 имеется открыто-замкнутая окрестность $U \subset \text{exp } C \setminus \text{exp}_1 C$. Согласно теореме Брауэра 4.14 эта окрестность гомеоморфна множеству Кантора, а значит гомеоморфна и дискретному объединению $U \cup C_2$ с другим экземпляром множества Кантора. Таким образом построен гомеоморфизм множества Кантора $\text{exp } C$ на множество Кантора $\text{exp } C \cup C_2$.

Из нульмерности множества Кантора и теоремы Брауэра 4.14 следует, что у точки x_0 имеется открыто-замкнутая окрестность $U \subset \text{exp } C \setminus \text{exp}_1 C$, которая гомеоморфна множеству Кантора, а значит гомеоморфна и дискретному объединению $U \cup C_2$ с другим экземпляром множества Кантора. Фиксируем какой-нибудь гомеоморфизм $h: U \rightarrow U \cup C_2$. Дополнив его тождественным отображением на $\text{exp } C \setminus U$, мы получаем гомеоморфизм $H: \text{exp } C \rightarrow \text{exp } C \cup C_2$. Гомеоморфизм H двусторонне равномерно непрерывен, поэтому равномерно гомеоморфны дополнения $\text{exp } C \setminus \text{exp}_1 C$ и $(\text{exp } C \cup C_2) \setminus \text{exp}_1 C$. Согласно предложению 4.59 второе пространство равномерно гомеоморфно пространству $(\text{exp}(C \cup \{pt\})) \setminus \text{exp}_1(C \cup \{pt\})$. $\square$

Предложение 4.64. Пусть для отображения $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств для констант $0 \leq l_f \leq L_f < \infty$ справедливы неравенства

$$l_f |x_1 x_2|_X \leq |f(x_1) f(x_2)|_Y \leq L_f |x_1 x_2|_X \text{ для любых двух точек } x_1, x_2 \in X.$$

Тогда для отображения $\text{exp } f: \text{exp } X \rightarrow \text{exp } Y$ для любых $A, C \in \text{exp } X$ справедливы неравенства

$$l_f d_H^X(A, C) \leq d_H^Y(f(A), f(C)) \leq L_f d_H^X(A, C).$$

Доказательство. Пусть $A, C \subset X$.

Зафиксируем $a \in A$. Для любого $c \in C$ выполняется неравенство $|f(a)f(c)| \leq L_f |ac|$, поэтому $|f(a)f(C)| = \inf\{|f(a)f(c)| : c \in C\} \leq \inf\{L_f |ac| : c \in C\} = L_f \inf\{|ac| : c \in C\} = L_f |aC|$. Из доказанного включения $f(a) \in B(f(C), L_f d_H(A, C))$ и произвольности точки $a \in A$ вытекает включение $f(A) \subset B(f(C), L_f d_H(A, C))$. Аналогично $f(C) \subset B(f(A), L_f d_H(A, C))$, что с учетом первых равенств (5) дает правое неравенство предложения.

Для любого $a \in A$ имеем $|f(a)f(C)| = \inf\{|f(a)f(c)| : c \in C\} \geq \inf\{l_f |ac| : c \in C\} = l_f \inf\{|ac| : c \in C\} = l_f |aC|$. Поэтому и $\overrightarrow{d_H}(f(A), f(C)) = \sup\{|f(a)f(C)| : a \in A\} \geq l_f \sup\{|aC| : a \in A\} = l_f \overrightarrow{d_H}(A, C)$. Аналогично $\overrightarrow{d_H}(f(C), f(A)) \geq l_f \overrightarrow{d_H}(C, A)$. С учетом последних равенств (5) получается левое неравенство предложения. $\square$

Теорема 4.65. Для метрических компактов X и Y без изолированных точек и констант $0 < l \leq L < \infty$ следующие условия эквивалентны:

- (1) их канонические дополнения $\text{exp } X \setminus X$ и $\text{exp } Y \setminus Y$ липшицево гомеоморфны с константами $l \leq L$;
- (2) компакты X и Y липшицево гомеоморфны с константами $l \leq L$.

Доказательство. Импликация 2) $\implies$ 1) вытекает из предложения 4.64.

1) $\implies$ 2). Пусть задано билипшицево отображение $h: \text{exp } X \setminus X \rightarrow \text{exp } Y \setminus Y$ с константами $0 < l_h = l \leq L = L_h < \infty$. Пополнением $\text{exp } X \setminus X$ является его замыкание, которое в силу отсутствия у X изолированных точек совпадает со всей экспонентой $\text{exp } X$. Согласно предложению 4.31 существует продолжение $H: \text{exp } X \rightarrow \text{exp } Y \setminus Y = \text{exp } Y$. Продолжение H является липшицевым с теми же константами $0 < l_h = l \leq L = L_h < \infty$. Поэтому отображение H является биекцией. Следовательно $H(X) = Y$ и ограничение H на X является билипшицевым отображением с константами l и L . $\square$

Так как изометрия это билипшицево отображение f с $l_f = L_f$, то получается

Следствие 4.66. Для метрических компактов (X, ϱ_X) и (Y, ϱ_Y) без изолированных точек следующие условия эквивалентны:

- (1) их канонические дополнения $(\text{exp } X \setminus X, d_H^X)$ и $(\text{exp } Y \setminus Y, d_H^Y)$ изометричны;
- (2) компакты X и Y изометричны.

4.17 Экспонента наследственно неразложимого континуума.

Определение отображения (функции) Уитни имеет описательный характер того, что мы интуитивно понимаем под мерой величины множества:

Определение 4.67. Для компакта X и $\mathcal{H} \subset \exp X$ *функцией Уитни для $\mathcal{H}$* называется непрерывная функция $\mu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющая двум условиям:

- (1) $\mu(A) < \mu(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{H}$ таких, что $A \subset B$ и $A \neq B$;
- (2) $\mu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{H} \cap \exp_1(X)$.

В настоящее время известно несколько примеров существенно различных функций Уитни, первый из которых построил в 1932 году Хасслер Уитни.

A continuum is said to be **decomposable** provided that it is the union of two proper subcontinua (**proper** means not equal to the whole space).

A continuum that is not decomposable is said to be **indecomposable**.

A continuum is said to be **hereditarily decomposable** provided that all of its nondegenerate subcontinua are decomposable.

A continuum is said to be **hereditarily indecomposable** provided that all of its subcontinua are indecomposable.

Although it may seem that all nondegenerate continua are decomposable, this is far from being the case. Most continua in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) are hereditarily indecomposable, where most means that they form a dense G_δ -set of points in the hyperspace $\exp^c \mathbb{R}^n$.

The following results of Bing point out the abundance as well as the diversity of hereditarily indecomposable continua:

Any n -dimensional continuum ($n < \infty$) contains an $(n-1)$ -dimensional, hereditarily indecomposable continuum; in addition,

there are infinite-dimensional, hereditarily indecomposable continua.

Лемма 4.68. Let M be any compact metric space and let τ denote the topology for M . Let Γ be any collection of nonempty compact mutually disjoint subsets of M whose union is M (i.e., Γ is a **set-theoretic decomposition** of M into [nonempty] compact sets). Consider the following diagram

$$\begin{array}{ccc} (M, \tau) & = & (M, \tau) \\ \downarrow p & & \downarrow \eta \\ (\Gamma, \tau_\Gamma) & \xleftarrow{i} & (\Gamma, \tau_{H|\Gamma}) \end{array}$$

where τ_Γ denotes the decomposition topology for Γ , p denotes the natural map onto the decomposition space, $\tau_{H|\Gamma}$ denotes the topology (obtained from the Hausdorff metric) for Γ as contained in $\exp M$ by inclusion, η denotes the natural “map” (not necessarily continuous), and i denotes the identity function. Then

(I) i is continuous, i.e., $\tau_\Gamma \subset \tau_{H|\Gamma}$;

(II) the following six statements are equivalent:

- (1) η is continuous;
- (2) $\tau_\Gamma = \tau_{H|\Gamma}$;
- (3) $(\Gamma, \tau_{H|\Gamma})$ is compact;
- (4) (Γ, τ_Γ) is a continuous decomposition of M ;
- (5) p is both an open and a closed mapping;
- (6) η is both an open and a closed mapping.

Лемма 4.69. Let X be an hereditarily indecomposable continuum. Let μ be any given fixed Whitney map for $\exp^c X$. Then, for each $t \in [0, \mu(X)]$, $\mu^{-1}(t)$ is a set-theoretic decomposition of X into subcontinua of X .

This means that $\mu^{-1}(t)$ covers X and that the members of $\mu^{-1}(t)$ are mutually disjoint, for every $t \in [0, \mu(X)]$.

Let X be an hereditarily indecomposable continuum and let μ be a Whitney map for $\exp X$. For each $t \in [0, \mu(X)]$, let

$$\eta_t: X \rightarrow \mu^{-1}(t)$$

denote the function μ in 4.68 for the case when $M = X$ and $\Gamma = \mu^{-1}(t)$ [by 4.69, this choice for Γ in 4.68 is permissible]. In other words, for each $x \in X$, $\eta_t(x)$ is the unique [by 4.69] member of $\mu^{-1}(t)$ to which x belongs.

The following result says what Kelley actually showed in his proof of [165, 8.5] rather than what he stated as 8.5.

Теорема 4.70. *Let X be an hereditarily indecomposable continuum. Let μ be any given fixed Whitney map for $\exp X$. Then $\{\eta_t$ as in 4.69]:*

(1.80.1) *for each $t \in [0, \mu(X)]$, $\mu^{-1}(t)$ is a monotone continuous decomposition of X ;*

(1.80.2) *for each $t \in [0, \mu(X)]$, η_t is a monotone open mapping of X onto $\mu^{-1}(t)$;*

(1.80.3) *Given any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $0 < t < \delta$ then $0 < \text{diam } \eta_t^{-1}(A) < \varepsilon$ for each $A \in \mu^{-1}(t)$.*

Следствие 4.71. *Let X be an hereditarily indecomposable continuum such that $\dim X \geq 2$ [such continua exist]. Then*

(1.83.1) *given any $\varepsilon > 0$, there exists a monotone open mapping $f: X \rightarrow Y_\varepsilon$ such that $0 < \text{diam } f^{-1}(A) < \varepsilon$ for each $y \in Y_\varepsilon$ and $\dim Y_\varepsilon = \infty$;*

(1.83.2) *there exists $\varepsilon > 0$ such that if $f: X \rightarrow Y$ is any monotone open mapping satisfying $0 < \text{diam } f^{-1}(A) < \varepsilon$ for each $y \in Y$, then $\dim Y = \infty$;*

(1.83.3) *There exist hereditarily indecomposable continua which are infinite-dimensional.*

What Kelley stated and proved was that **if** there exist hereditarily indecomposable continua of dimension greater than one, **then** there exist such continua which are infinite-dimensional. At the time of Kelley's paper, the only known example of an hereditarily indecomposable continuum was the continuum we now call the pseudo-arc and was one-dimensional. Ten years later, Bing showed for the first time that there exist infinite-dimensional hereditarily indecomposable continua. Bing constructed these continua in the Hilbert cube.

Отсюда вытекает, что в условии следствия 4.71

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{GH}^c(\exp X, \exp Y_\varepsilon) = 0.$$

Тема 5

Добавление: аналог топологии на собственных классах

Теория, которую мы развиваем в настоящей статье, имеет дело со всеми непустыми метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии. Так как на каждом множестве можно ввести метрику, например, положив все расстояния между различными точками равными 1, семейство метрических пространств не является множеством. Для работы с такими семействами мы будем пользоваться теорией множеств фон Неймана–Бернаиса–Гёделя [12, 13], причем всегда будем считать, что выполняется аксиома выбора. Эту теорию обычно для краткости обозначают NBGC. Напомним, что все объекты этой теории называются **классами** и бывают двух типов: **множества** — это классы, которые являются элементами других классов, и **собственные классы**, не являющиеся элементами никаких других классов. Приведем примеры важных для нас собственных классов:

- класс $\mathcal{V}$ всех множеств;
- класс ORD всех ординалов;
- класс CARD всех кардиналов;
- класс TOP всех топологий на всех множествах из $\mathcal{V}$;
- класс $\mathcal{M}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение, произведение, отображение и др.

Мы будем пользоваться следующей терминологией: **обобщенной псевдометрикой на множестве X** называется каждое отображение $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющее условиям $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (симметричность), $\rho(x, x) = 0$ для всех $x \in X$, и $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника). Если $\rho(x, y) = 0$ в точности тогда, когда $x = y$, то слово “псевдометрика” заменяется на слово **метрика**. Если же $\rho(x, y) < \infty$ при всех $x, y \in X$, то слово “обобщенный” убирается. Так как произведение и отображение определены для всех классов, то описанные только-что понятия переносятся слов в слово и на произвольные классы. Ниже мы напомним определения расстояния Громова–Хаусдорфа и непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа, которые, как будет отмечено, являются обобщенными псевдометриками на собственном классе $\mathcal{M}$.

Интересной особенностью собственных классов является невозможность дословно перенести на них понятие топологии: действительно, все множество, на котором определяется топология, является элементом топологии, поэтому если вместо множества рассмотреть собственный класс, то он никак не может быть элементом топологии. Чтобы обойти эту проблему и ввести аналог топологии, в [15] было предложено рассматривать **классы $\mathfrak{C}$, фильтрующиеся множествами**. Последнее означает, что для каждого кардинального числа n подкласс $\mathfrak{C}_n = \{x \in \mathfrak{C} : \#x \leq n\}$, где $\#x$ обозначает мощность множества x , является множеством. Примером таких классов могут служить любые множества, а также собственные классы ORD, CARD и $\mathcal{M}$. Классы $\mathcal{V}$ и TOP такими не являются.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, фильтрующийся множествами. Отображение $\tau: \text{CARD} \rightarrow \text{TOP}$ такое, что

- $\tau_n := \tau(n)$ — топология на $\mathfrak{C}_n$ для каждого $n \in \text{CARD}$,
- для каждых $m, n \in \text{CARD}$, $m \leq n$ топология τ_m индуцирована из τ_n .

Отметим, что если $\mathfrak{C}$ — множество мощности n , то τ_n — обычная топология на $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n$, и для всякого $m \geq n$ имеем $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_n$, а также $\tau_m = \tau_n$. При $m \leq n$ топология τ_m на $\mathfrak{C}_m$ обычным образом индуцируется из τ_n . Сказанное позволяет назвать отображение τ **топологией** даже в случае собственных классов. Фильтрующий множествами класс $\mathfrak{C}$, для которого задана топология τ , будем называть **топологическим классом**.

Замечание 5.1. Определить топологию в приведенном выше смысле можно и для любого собственного класса. Для этого достаточно изменить понятие фильтрации множествами, не привязывая ее к мощности элементов, входящих в класс. Хорошо известно, что в NBGС между любыми собственными классами существует биекция, поэтому если $\mathfrak{C}$ — топологический класс, а $\mathfrak{C}'$ — произвольный класс, скажем $\mathcal{V}$, то с помощью биекции $\varphi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ можно перенести фильтрацию множествами $\mathfrak{C}_n$ на $\mathfrak{C}'$, положив $\mathfrak{C}'_n = \varphi(\mathfrak{C}_n)$ и проделать все приведенные выше построения топологии. Однако для наших целей вполне хватит фильтрации, заданной с помощью мощности.

Важным частным случаем является метрическая топология, определенная на классе $\mathfrak{C}$, фильтрующемся множествами. Пусть $\rho: \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \rightarrow [0, \infty]$ — обобщенная псевдометрика, тогда для каждого $n \in \text{CARD}$ определена соответствующая метрическая топология τ_n на $\mathfrak{C}_n$. Соответствующее отображение $\tau: \text{CARD} \rightarrow \text{TOP}$, $\tau: n \mapsto \tau_n$ назовем **метрической топологией**, а пространство $\mathfrak{C}$, наделенное такой топологией, назовем **метрическим классом**.

Отметим, что для каждых $x \in \mathfrak{C}$ и $r \in (0, \infty]$ определен **открытый шар** $U_r(x) = \{y \in \mathfrak{C} : \rho(x, y) < r\}$, представляющий собой, вообще говоря, собственный подкласс в $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что если $m \in \text{CARD}$ не меньше $\#x$, то множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса r в $\mathfrak{C}_m$.

Предложение 5.2. Для любых $x \in \mathfrak{C}$, $r > 0$ и $m \in \text{CARD}$ множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ открыто в топологии τ_m .

Доказательство. Выберем произвольное $y \in U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, тогда $|xy| < r$. Существует $\delta > 0$ такое, что $|xy| < r - \delta$, поэтому $U_\delta(y) \subset U_r(x)$, но $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса δ в $\mathfrak{C}_m$, и $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m \subset U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, следовательно, $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m \in \tau_m$. $\square$

Если $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — отображение между двумя топологическими классами, то естественным образом определяется его непрерывность. А именно, известно, что образ каждого множества также является множеством, поэтому для каждого кардинального числа n существует такое кардинальное число m , что $f(\mathfrak{A}_n) \subset \mathfrak{B}_m$. Наименьшее из таких кардинальных чисел m обозначим n_f . Ограничивая f до отображения из $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{B}_{n_f}$, мы получаем обычное отображение топологических пространств. Легко видеть, что если вместо n_f взять кардинальное число $m \geq n_f$, то ограничение f на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_m$ будет непрерывным (в точке или в целом), если и только если его ограничение на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно. Таким образом, **непрерывность** отображения f в точке или в целом определим как непрерывность всех его ограничений $f: \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B}_{n_f}$ (мы и в дальнейшем будем обозначать ограничение той же буквой, что и исходное отображение).

Теорема 5.3. Пусть $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — отображение метрических классов. Тогда f непрерывно в точке $x \in \mathfrak{A}$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Отображение f непрерывно в целом, если и только если оно непрерывно в каждой точке.

Доказательство. Пусть сначала для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Покажем, что f непрерывно в x . Выберем произвольное n , произвольное $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$, отвечающее сформулированному выше свойству. Так как $U_\delta(x) \cap \mathfrak{A}_n$ и $U_\varepsilon(f(x)) \cap \mathfrak{B}_{n_f}$ — открытые шары соответственно в $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$, причем в силу предположения образ первого из них содержится во втором, то ограничение $f: \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно в x .

Докажем теперь обратное утверждение методом от противного. А именно, предположим, что для некоторого f существуют такие $x \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$, что ни для какого $\delta > 0$ не выполняется $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Последнее означает, что существует последовательность $y_k \in \mathfrak{A}$, для которой $|xy_k| < 1/k$, но $|f(x)f(y_k)| \geq \varepsilon$. Пусть n — мощность x , а n_k — мощность y_k . Так как ограничение $f: \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно, то существует $s > 0$, для которого $U_s(x) \cap \mathfrak{A}_n$ переводится отображением f в $U_\varepsilon(f(x)) \cap \mathfrak{B}_{n_f} \subset U_\varepsilon(f(x))$. Таким образом, можно сразу предполагать, что все n_k не меньше n .

Так как счетное объединение множеств по-прежнему является множеством, существует $p \in \text{CARD}$ такое, что $p \geq n_k$ для всех k . Отметим, что $x \in \mathfrak{A}_p$, $f(x) \in \mathfrak{B}_{p_f}$ и ограничение $f: \mathfrak{A}_p \rightarrow \mathfrak{B}_{p_f}$ непрерывно, поэтому существует $s > 0$, для которого f -образ открытого в $\mathfrak{A}_p$ шара $U_s(x) \cap \mathfrak{A}_p$ радиуса s содержится в открытом в

$\mathfrak{B}_{p_f}$ шаре $U_\varepsilon(f(x)) \cap \mathfrak{B}_{p_f} \subset U_\varepsilon(f(x))$ радиуса ε . Но тогда при $1/k < s$ выполняется $y_k \in U_s(x) \cap \mathfrak{A}_p$ и, значит, $|f(x)f(y_k)| < \varepsilon$, противоречие. $\square$

Следствие 5.4. Пусть $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — липшицево отображение метрических классов, в частности, нерастягивающее, тогда f непрерывно.

Отображение $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ метрических классов называется **открытым в точке** $x \in \mathfrak{A}$, если для любого $r > 0$ существует $s > 0$ такое, что $f(U_r(x)) \supset U_s(f(x))$. Из теоремы мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 5.5. Пусть $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — биективное отображение метрических классов, тогда f^{-1} непрерывно в точке $z = f(x) \in \mathfrak{B}$, если и только если f открыто в x .

Литература

- [1] Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.
- [2] Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Birkhäuser, 1999.
- [3] Lim S., Memoli F., Smith Z. *The Gromov–Hausdorff distance between spheres*. Geometry & Topology, 2023, v. 27, N 9, pp. 3733–3800.
- [4] Lee J., Morales C.A. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs. Birkhäuser/Springer, 2022.
- [5] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.
- [6] Munkres J.R. *Topology*, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [7] Engelking R. *General Topology*, Warszawa, PWN, 1985.
- [8] Tej Bahadur Singh, *Introduction to Topology*. 1st ed. 2019.
- [9] Stone A.H. *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, pp. 977–982.
- [10] Dowker C.H. *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math., 1947, v. 69, pp. 200–242.
- [11] Nagami K., Roberts J.H. *Metric-dependent dimension functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, No. 4, 601–604.
- [12] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
- [13] Banach T. Classical set theory: theory of sets and classes // ArXiv e-prints 2023. arXiv:2006.01613[math.LO].
- [14] Von Neumann–Bernays–Gödel set theory (wikipedia)
- [15] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance*, 2020, arXiv:2009.00458v1 [math.MG].
- [16] Bogaty S.A., Tuzhilin A.A. *Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance*, 2025, arXiv:2512.02611.
- [17] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, 2004; D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33** A.M.S., Providence, RI, 2001.
- [18] Tuzhilin A.A. *Lectures on Hausdorff and Gromov-Hausdorff Distance Geometry*, 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2012.00756.
- [19] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, — Любое издание.
- [20] Фет А.И. *Обобщение теоремы Люстернака–Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем*, ДАН, 1954, т. 95, N6, с. 1149–1151.
- [21] Engelking R. *Theory of Dimensions*. Finite and Infinite, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

- [22] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometric Embeddings of Bounded Metric Spaces into the Gromov-Hausdorff Class*, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2203.02904.
- [23] Illanes A., Nadler S. *Hyperspaces*, Marcel-Dekker, New York, 1999.
- [24] Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. *Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers*, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2202.07337v1 [math.MG].
- [25] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116v1 [math.MG].
- [26] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Лекции по геометрии расстояния Громова-Хаусдорфа*, 2021.
- [27] Ivanov A.O., Tsvetnikov R.A., Tuzhilin A.A. *Path Connectivity of Spheres in the Gromov-Hausdorff Class*, 2021, ArXiv e-prints, arXiv:2111.06709 [math.MG].
- [28] Mazur S., Ulam S. *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels norme's*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1932, v. 194, pp. 946–948.
- [29] Väisälä J. *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, 2003, v. 110, pp. 633–635.
- [30] Nica B. *The Mazur-Ulam theorem*, Expo. Math., 2012, v. 30, 397–398.
- [31] Hatori O. *A simple proof of the Mazur-Ulam theorem*, 2024.
- [32] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850.
- [33] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces*, ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.
- [34] Нестеров Б.А. *О расстоянии Громова – Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой*, Чебышевский сб., 2025, т. 26, N 2, с. 186–197.
- [35] Борисова О.Б. *Метрический сегмент в классе Громова – Хаусдорфа*, Чебышевский сб., 2022, т. 23, N 3, с. 5–18.
- [36] S. Eilenberg, S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, 231–294.
- [37] Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, Москва. “Физматгиз”. 1958; Samuel Eilenberg, Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton Mathematical Series, 15, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1952.
- [38] Ион Букур, Аристид Деляну, *Введение в теорию категорий и функторов*, Москва. “Мир”. 1972; Ion Bucur and Aristide Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Functors*, London. “A Wiley-Interscience publication”. Pure & Applied Mathematics Monograph, vol. XIX. 1968.
- [39] М.Ш. Цаленко, Е.Г. Шультгейффер, *Основы теории категорий*, Москва. “Наука”. 1974.
- [40] В.В. Федорчук, *О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов*, Успехи матем. наук, 1984, 39, n 5, 169–208.
- [41] В.В. Федорчук, *Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия*, Успехи матем. наук, 1981, 36, n 3, 177–195.
- [42] М.М. Заричный, В.В. Федорчук, *Ковариантные функторы в категориях топологических пространств*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 28 (1990), 47–95; M.M. Zarichnyi, V.V. Fedorchuk, *Covariant functors in categories of topological spaces*, J. Soviet Math., 53:2 (1991), 147–176
- [43] В.И. Пономарев, *Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов*, Матем. сб., 1959, том 90, номер 2, 191–212.
- [44] J. Segal, *Hyperspaces of the inverse limit space*, Proc. Amer. Math. Soc, 1959, 10, n 5, 706–709.

- [45] K. Borsuk, *Remark on the Cartesian product of two 1-dimensional continua*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 23 (1975), 971–973.
- [46] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Mat., 37 (2002), 347–363.
- [47] C. Eberhart, S.B. Nadler and W.O. Nowell, *Spaces of order arcs in hyperspaces*, Fund. Math., 1981, 112, 111–120.
- [48] Johannes de Groot, *Supercompactness and superextensions*, Proc. First Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications, Berlin, VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, S. 89–90.
- [49] R. Arens, J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math., 1951, 1, 5–31.
- [50] R.H. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 429–432.
- [51] J.R. Jackson, *Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory*, Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 327–333.
- [52] Philip Bacon, *Axioms for the Čech cohomology of paracompacta*, Pacific J. Math., 1974, 52, 7–9.
- [53] Satya Deo, *On the tautness property of Alexander-Spanier cohomology*, Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 52, 441–444.
- [54] U.H. Karimov, *On generalized homotopy axiom*, Reports of Academy of Science of Tajikian SSR, 1979, 22, (9), 521–524.
- [55] K. Borsuk, *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. 62 (1968), 223–254.
- [56] D.E. Christie, *Net homotopy for compacta*, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), 275–308.
- [57] Карол Борсук, *Теория шейнов*, Москва. “Мир”. 1976; Karol Borsuk, *Theory of shape*, Arhus University, 1971.
- [58] L.E.J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, Proc. Akad. Amsterdam, 1910, 12, 785–794.
- [59] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Москва. “Мир”. 1986; Ryszard Engelking, *General Topology*, Warszawa, PWN, Monografie Matem., 60, 1977; 1985.
- [60] О.Н. Keller, *Die Homeomorphie der Kompakten Konvexen Mengen in Hilbertischen Räumen*, Math. Ann., 1931, 105, 748–758.
- [61] V.L. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, 30–45.
- [62] В.В. Федорчук, А.Ч. Чигогидзе, *Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия*, Москва. “Наука”. 1992.
- [63] Т.А. Чапман, *On some applications of infinite-dimensional topology to the theory of shape*, Fund. Math. 76 (1972) 181–193.
- [64] Т. Чепмэн, *Лекции о Q -многообразиях*, Москва. “Мир”. 1981; Т.А. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 28 (1976).
- [65] H. Toruńczyk, *On CE -images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds*, Fund. Math. 106 (1980), 31–40.
- [66] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72, 515–519.
- [67] М.И. Кадец, *Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха*, Функц. анализ и его прил., 1967, том 1, выпуск 1, 61–70.
- [68] Карол Борсук, *Теория ретрактов*, Москва. “Мир”. 1971; Karol Borsuk, *Theory of Retracts*, Warszawa, PWN, Monografie Matem., 44, 1967.
- [69] H. Tietze, *Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journ. f. Math., 45 (1915), 9–14.
- [70] J. Dugundji, *An extension of Tietze’s Theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353–367.

- [71] T.A. Chapman, *Shapes of some decomposition spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 20 (1972), n. 8, 653–656.
- [72] M.M. Marjanović, A.R. Vučemić, *Two nonhomeomorphic countable spaces having homeomorphic squares*, Comment. Math. Univ. Carolin. 26 (1985), n. 3, 579–588.
- [73] Alejandro Illanes and Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, New York, Marcel Dekker, Inc., Pure and Applied Mathematics, v. 216, 1999.
- [74] Jorge M. Martinez Montejano, *Results on hyperspaces*. West Virginia University. (2004).
- [75] Jorge M. Martinez Montejano, R. Juárez, *Z-sets in hyperspaces of continua*. (2011, 2014).
- [76] D.W. Curtis, *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets*. Topology and its Applications. 22, (1986). 97–107.
- [77] A. Pelczyński, *A remark on space 2^X for zero-dimensional X* , Bull. Polish Acad. Sci., 13 (1965) 85–89.
- [78] M. Alonso-Morón, A. G. Gómez, *The Hausdorff metric and classifications of compacta*, Bull. London Math. Soc. 38 (2006) 314–322.
- [79] G. Acosta, *On smooth fans and unique hyperspace*, Houston J. Math. 30 (2004), no. 2, 543–558.
- [80] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*. In: Continuum Theory (Denton, TX, 1999), 33–49. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 230, Dekker, New York, 2002.
- [81] G. Acosta, *Continua with almost unique hyperspace*, Topology Appl. 117 (2002), no. 3, 299–312.
- [82] G. Acosta, *On compactifications of the real line and unique hyperspace*, Topology Proc. 25 (2000), Spring, 45–59.
- [83] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace 2^X* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), no. 2, 279–284.
- [84] E. Castañeda and A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), no. 9, 1434–1450.
- [85] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topology Proc. 27 (2003), no. 1, 179–188.
- [86] R.M. Schori and J.E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 217–235.
- [87] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(S^1)$ is a cone*, Glas. Mat. Ser. III 37(57) (2002), no. 2, 347–363.
- [88] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik* Math. Ann. 100 (1928), 75–163.
- [89] R.H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1101–1110.
- [90] E.E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111–1121.
- [91] R. Duda, *On convex metric spaces. III*, Fundam. Math. 51, 23–33 (1962).
- [92] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph. I, II*, Fund. Math. 62 (1968), 265–286 and 63 (1968), 225–255.
- [93] R. Schori and J.E. West, *2^I is homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 402–406.
- [94] R. Schori and J.E. West, *Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes* Pacific Journal of Mathematics, 53(1) (1974), 239–251.
- [95] M. Wojdysławski, *Sur la contractilité des hyperspaces de continus localement connexes*, Fund. Math. 30 (1938), 247–252.
- [96] M. Wojdysławski, *Retractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math. 32 (1939), 184–192.
- [97] J.E. West, *Factoring the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 116–120.

- [98] D.W. Curtis and R.M. Schori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927–931.
- [99] D.W. Curtis and R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19–38.
- [100] H. Toruńczyk, *On CE -images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds*, Fund. Math. 106 (1980), 31–40.