

Слоение Лиувилля билиардных книжек, содержащих фокусы.

В.В.Ведюшкина

МГУ имени М.В.Ломоносова

Под математическим билиардом обычно понимается происходящее без потери скорости движение материальной точки по плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma = \partial\Omega$ (стенку билиарда). Поскольку метрика евклидова, то ковектора можно отождествить с векторами — и далее будем для наглядности рассматривать $M^4 = T\Omega / \sim$ как фазовое пространство. Элементы $T\Omega$ являются парой точки $P = (x, y)$ и вектора $\vec{v} = (v_x, v_y) \in T_P\Omega$. Гамильтонианом (энергией) системы является $H = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Необходимость отождествить “далекие” друг от друга пары точка-вектор из $T\Omega$ вызвана наличием отражения. Для выбранной точки $P \in \gamma = \partial\Omega$ отождествляются векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}'$, если их модули равны, а разность перпендикулярна касательной к γ в точке P . Это условие соответствует абсолютно упругому отражению с равенством углов падения и отражения. Если кривая γ не имеет излома в P , и вектор $\vec{v}$ трансверсален γ , то он будет отождествлен с единственным вектором $\vec{v}'$ (касательный к γ вектор является предельным положением пары таких отождествляемых векторов).

Если точка P есть точка излома γ , то обыкновенно требуют равенства $\pi/2$ внутреннего угла. Если $\vec{v}$ трансверсален обоим гладким дугам γ , то пара $(P, \vec{v})$ отождествляется с тремя другими парами точка-вектор, а если направлена по касательной к одной из них — то ровно с одной парой. Тем самым, для плоского билиарда в области Ω прообраз точки $P \in \Omega$ в неособом уровне энергии $Q_h^3 \subset M^4 : H = h$ относительно проекции $\pi : (P, \vec{v}) \rightarrow P$ гомеоморфен окружности для $P \in \text{Int } \Omega$ и отрезку для $P \in \gamma$. Попадание в точку излома с углом $\pi/2$ может пониматься как необходимость частицы отразиться дважды, по разу от каждой из граничных дуг.

Имеются различные определения интегрируемости билиарда (см., например, [1]). Мы будем основываться на интегрируемости по Лиувиллю: требовать наличие первого интеграла, инволютивного и функционально независимого с энергией H . Всюду кроме прообраза границы фазовое пространство наследует гладкую и симплектическую структуру из кокасательного расслоения, т.е. инволютивность корректно определена. При отражении траектории от границы будем требовать непрерывности первого интеграла. Такое понятие “кусочно-гладкой” интегрируемости по Лиувиллю для билиардных систем было предложено А.Т.Фоменко и описано в работе [2].

Простейшими примерами интегрируемых билиардов служат билиарды внутри круга, прямоугольника и эллипса. В первом случае сохраняется радиус окружности, которой касается каждое звено ломаной-траектории, во втором — неориентированный угол между фиксированной прямой и прямыми, содержащими звенья траектории.

Дж. Биркгоф [3] рассмотрел билиард внутри эллипса на плоскости как предельный случай задачи Якоби о движении вдоль геодезических на эллипсоиде $E^2 \subset R^3$ при стремлении к нулю меньшей полуоси. Омбилические точки эллипсоида при этом переходят в фокусы граничного эллипса. По теореме Якоби–Шаля касательные к фиксированной геодезической на E^2 касаются некоторого гиперboloида, софокусного с E^2 и одинакового для всех точек данной геодезической. Если этот гиперboloид однополостный, то звенья образа геодезической касаются эллипса, а если двуполостный — то гиперболы. Получаемые квадрики имеют те же фокусы, что и граничный эллипс и принадлежат семейству Oxy :

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda). \quad (1)$$

Здесь параметры $0 < b < a$ — квадраты полуосей граничного эллипса. Большая полуось эллипса лежит на оси Ox и содержит фокусы (будем иногда называть Ox фокальной осью), а малая — она вертикальной оси Oy . Они входят в семейство (1) при $\lambda = b, \lambda = a$ соответственно.

Интегралом является значение λ : для каждого звена каустики является квадратика с этим параметром. Его явное выражение через x, y, v_x, v_y имеет вид

$$\Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + bv_x^2 + av_y^2}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2)$$

Пусть $\lambda = 0$, Тогда P лежит на граничном эллипсе, а вектор $\vec{v}$ касается его. Если $\lambda = a$, то $P \in Oy \cap \Omega$, и вектор $\vec{v} \parallel Oy$. Этим уровням соответствует одномерный уровень $\Lambda = \lambda$ в Q_h^3 . Уровень $\lambda = b$ является двумерным. Звенья каждой траектории лежат на прямых, проходящих через один или другой фокус. Особые траектории на уровне $\Lambda = b$ состоят из пар $(P, \vec{v})$: точка $P \in Ox \cap \Omega$ и $v \parallel Ox$.

Поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямыми углами, то Λ сохраняется [4] при отражении траектории от каждой кривой семейства (1). При этом отсутствие внутренних углов $3\pi/2$ гарантирует непрерывность движения бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик.

Под *элементарным* (софокусным) бильярдом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик семейства (1) и не содержит углов $3\pi/2$. Введенная В.В.Ведюшкиной в работе [5] эквивалентность таких столов (далее называем ее *структурной эквивалентностью*) сохраняет слоение и, опуская некоторые детали, определяется так. Два бильярда эквивалентны, если их области-стола переводятся друг в друга изометрией плоскости или же имеется непрерывная деформация параметров λ_i граничных дуг одного стола в параметры другого, сохраняющая тип каждой граничной дуги (эллиптический при $(-\infty, b)$, фокальный при $\lambda = b$ и гиперболический при $(b, a]$) и сохраняющая класс гомеоморфности стола Ω . Примеры элементарных бильярдов изображены на рис. 1, их обозначения согласованы с работой [5].

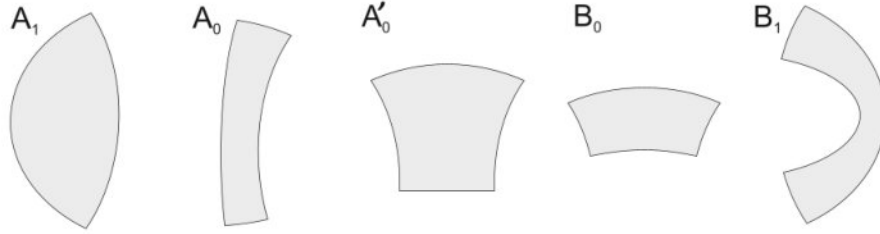


Рис. 1: Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Как отмечено, класс интегрируемых бильярдов на плоских столах с криволинейной границей (в отсутствие потенциала или магнитного поля) сводится к классу *софокусных бильярдов* на столах, ограниченных дугами софокусных квадрик и не имеющих внутренних углов $3\pi/2$ в границе, а также классу *круговых бильярдов* — вырождению софокусных бильярдов при стремлении фокусов квадрики к ее центру (такие столы ограничены дугами концентрических окружностей и отрезками их радиусов, причем углы в точках излома границы равны $\pi/2$).

Хотя данный класс является весьма узким (например, с точки зрения топологии слоений Лиувилля), он допускает следующие принципиальные расширения, предложенные В.В.Ведюшкиной.

Определение 1 *Обобщенным (топологическим) бильярдом назовем динамическую систему на двумерном ориентированном компактном многообразии, склеенном (посредством изометрий) из элементарных софокусных бильярдов-листов:*

- *изометричная склейка двух бильярдов-листов по ребру означает склейку максимальной по включению гладкой дуги границы каждого из столов (т.е. либо эллипс, либо дуга от одного излома до другого),*
- *в каждой вершине склейки стола-комплекса сходится либо один, либо два, либо четыре угла плоских бильярдов-листов.*

Замечание 1 *Для топологического бильярда определена проекция на плоскость, являющаяся изометрией и гомеоморфизмом в ограничении на замыкание каждого плоского листа.*

Движение по топологическому бильярду определяется так: внутри плоского бильярда-листа движение происходит стандартно, т.е. вдоль прямолинейных отрезков, с естественным отражением от границы. Как только материальная точка попадает на ребро склейки, то после отражения она продолжает движение по другому бильярду-листу.

Введение топологических билиардов существенно расширило класс изучаемых билиардов. В работах [5, 7] они были классифицированы как структурно, так и топологически: для всех них были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга.

Существенно более широким расширением оказалось введение В.В.Ведюшкиной класса билиардных книжек [8, 9]. Эти столы являются CW-комплексами, ребра которых (1-клетки) оснащены перестановками на множестве инцидентных 2-клеток, см. подробнее [9].

Рассмотрим двумерный CW-комплекс, двумерными клетками которого являются плоские билиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Одномерными клетками комплекса являются сегменты границ элементарных билиардов — участки между изломами граничных кривых. Занумеруем все двумерные клетки и припишем каждому одномерному ребру комплекса — “корешку” книжки — циклическую перестановку из номеров листов, примыкающих к данному ребру. Изометрично спроектируем все билиарды-листы на плоскость. Если образ нескольких ребер CW-комплекса при этой проекции является одной и той же дугой плоскости, то объединим приписанные им циклы в одну перестановку (эти циклы, очевидно, независимы). Для непрерывности движения частицы по книжке потребуем коммутирование перестановок в нульмерных клетках. В терминах проекции это означает, что перестановки, приписанные дугам двух квадрик в окрестности точки пересечения последних, коммутируют (см. рис. 2). Этот двумерный комплекс с приписанными перестановками назовем *билиардной книжкой*.

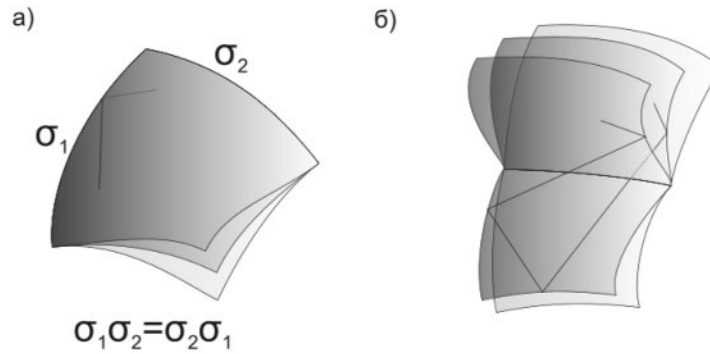


Рис. 2: Локальная структура окрестности вершины склейки билиардной книжки.

Билиардное движение по книжке определено следующим образом. Внутри двумерных клеток движение не меняется. Пусть при движении по листу с номером i материальная точка попадает на корешок книжки, тогда после удара она продолжит своё движение по листу $\sigma(i)$. Если листы с номерами i и $\sigma(i)$ расположены по одну сторону от корешка, то при ударе происходит отражение, а если по разные — то точка не отражается, а проходит корешок “насквозь” (см. рис. 2).

Замечание 2 Условие коммутирования перестановок в углах книжки является необходимым и достаточным условием для того чтобы продолжение траектории, попавшей в вершину угла, было корректно определено. Обозначим через l_1 и l_2 дуги квадрик, которые имеют общую точку O и обозначим через σ_1 и σ_2 приписанные им коммутирующие перестановки. Траектория попавшая в O с одной стороны является пределом близких траекторий, которые сначала ударяются о корешок l_1 , а потом о корешок l_2 . Такие траектории меняют номер билиарда по перестановке $\sigma_2 \circ \sigma_1$. С другой стороны, попавшая в вершину угла O траектория является пределом траекторий, которые ударяются о корешки в другом порядке и меняет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Получается, что материальная точка при попадании в вершину угла поменяет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ вследствие коммутирования σ_1 и σ_2 .

Если все листы билиардной книжки — двумерные клетки соответствующего комплекса — ограничены дугами одного и того же семейства квадрик, то тогда билиардная книжка задаёт вполне интегрируемую гамильтонову систему, быть может, кусочно-гладкую. В качестве дополнительного интеграла, как и в плоском случае, выступает параметр софокусной квадрики, которой касается траектория или её продолжение.

Среди всех траекторий этой системы отдельно выделяются траектории, которые лежат на прямых, проходящих через фокусы семейства квадрик. Они лежат на уровне $\Lambda = b$ дополнительного интеграла (назовем этот особый уровень фокальным). Среди траекторий на фокальном уровне, в свою очередь, критическими являются траектории, проходящие по отрезкам фокальной прямой.

Полученный класс билиардных книжек весьма велик и в настоящее время не получена полная классификация билиардов из этого класса. Задача сводится к описанию наборов перестановок, обладающих определенными свойствами. Ряд продвижений получено В.В.Ведюшкиной и В.А.Кибкало в недавней статье [10]. В ней В.А. Кибкало было доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 Пусть даны две коммутирующие перестановки $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Тогда они разбиваются в произведение перестановок, $\sigma_1 = \bigcup \sigma_{1i}, \sigma_2 = \bigcup \sigma_{2i}, i \in \{1..m\}, m \in \mathbb{N}$, где перестановки σ_{1i} и σ_{1j} (аналогично σ_{2i} и σ_{2j}) определены на разных элементах если $i \neq j$, а в каждой паре σ_{1i} и $\sigma_{2i} \in S_{n_i}$ определенных на одних и тех же элементах выполнено одно из двух.

- Одна из перестановок является степенью другой (такие перестановки будем в дальнейшем называть “незацепленными”).
- Перестановки раскладываются в объединение независимых циклов, так что все циклы в каждой из перестановок имеют одинаковую длину. При этом с помощью перенумерации элементов можно считать, что перестановки имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{1i} &= (1 \dots k) (k+1 \dots 2k) \dots (n_i - k + 1 \dots n_i), \\ \sigma_{2i} &= (1 \dots k+1 \dots 2k+1 \dots n_i - k + 1 \dots l \dots l+k \dots),\end{aligned}$$

где $l \in [1, k]$. Т.е. перестановка σ_{2i} последовательно пробегает по всем первым элементам циклов перестановки σ_{1i} , а затем при переходе на первый цикл попадает на номер l (назовем число l смещением перестановки σ_{2i} по отношению к перестановке σ_{1i}). Назовем такие перестановки “зацепленными”.

Рассмотрим выпуклую треугольную область на плоскости, ограниченную дугой гиперболы, дугой эллипса и фокальной прямой. Обозначим такую область через A'_1 следуя обозначениям статьи [5]. Наша цель – описать слоение Лиувилля билиардных книжек, склеенных из таких областей. Топологическая классификация книжек сводится к поиску трех перестановок, коммутирующих друг с другом. Установим тем не менее на перестановку, приписанную отрезку фокальной прямой естественное ограничение. Потребуем, чтобы длины всех циклов данной перестановки не превосходили 2. Это условие связано с тем, что если цикл данной перестановки имеет длину 3 и больше, то окрестность особой траектории, проходящей по данному корешку (и лежащему на уровне $\Lambda = b$), расслаивается на двумерные трансверсали к этой траектории так, что функция Λ на них не является функцией Морса. Иначе говоря, линии уровня функции Λ на этих трансверсалих выглядят как “мультиседло” (а не “крест”, как в случае функции Морса). Таким образом, задача классификации книжек, склеенных из листов A'_1 сводится к поиску двух коммутирующих перестановок, коммутирующих с перестановкой τ , длины циклов которой не превосходят двух.

Обозначим перестановку на эллиптическом корешке через μ , а перестановку на гиперболическом корешке через ν (перестановку на фокальной прямой мы ранее обозначили через τ). Рассмотрим перестановку $\omega = \mu \circ \nu \circ \tau$. Очевидно, что она коммутирует со всеми тремя перестановками. Разложим ω в произведение независимых циклов. Предположим, что все они имеют одинаковую длину.

Рассмотрим следующие случаи наборов перестановок и введем обозначения соответствующих книжек.

Пусть верно соотношение $\tau = \omega^n$, где $2n$ – это длины циклов перестановки ω . Перестановка μ переставляет все циклы τ местами. Обозначим такую книжку через $A^*(k)$, где k – количество циклов перестановки ω .

Перестановка ω состоит из $2k$ циклов. Профакторизуем все элементы циклов по отношению “быть в одном цикле перестановки ω ” и занумеруем получившееся множество $(1..2k)$. Пусть перестановка τ действует следующим образом $(1 \ k+1)(2 \ k+2) \dots (k \ 2k)$. Если перестановка μ примет вид $(1 \ 2 \dots 2k)$, то обозначим полученную книжку $A(Y_k)$, а если μ примет вид $(1 \ 2 \dots k)(k+1 \ k+2 \dots 2k)$, то обозначим полученную книжку $A(X_k)$.

Обозначим через $A'_1(k, n)$ книжку, склеенную из конечного числа областей A'_1 , так что перестановка на фокальной прямой тривиальна. При этом перестановка μ разбивается в n независимых циклов, а перестановка ν действует на элементы циклов со смещением на k .

Утверждение 2 Пусть дана связная бильiardная книжка, склеенная из конечного числа экземпляров треугольных областей A'_1 , ограниченных дугой гиперболы, дугой эллипса и фокальной прямой. Тогда такая бильiardная книжка принадлежит к одному из четырех описанных выше классов $A'_1(k, n)$, $A(Y_k)$, $A(X_k)$, $A^*(k)$.

Доказательство.

Заметим, что все циклы перестановки τ имеют одинаковую длину. В самом деле, пусть это не так. Занумеруем листы книжки, так чтобы перестановка $\tau = (1\ 2)\dots(2m-1\ 2m)(2m+1)\dots(2m+k)$. Пусть $\mu(2m+1) = l < 2m+1$. Тогда $\tau\mu(2m+1) = l \pm 1$, при этом $\mu\tau(2m+1) = \mu(2m+1) = l$, что нарушает коммутирование перестановок τ и μ . Тогда $\mu(2m+1) \geq 2m+1$. Следовательно, перестановки μ и ν обязаны сохранять множество стабильных элементов перестановки τ . Тогда книжка разбивается минимум на две компоненты связности. На одной компоненте μ и ν действуют только на листах с номерами меньшими $2m+1$, на другой – большими $2m$. Значит, все циклы перестановки τ имеют одинаковую длину.

Если перестановка τ тождественна, то книжка автоматически принадлежит к серии $A'_1(k, n)$. Далее будем считать, что перестановка τ раскладывается в произведение транспозиций.

Рассмотрим разложение перестановки $\omega = \mu \circ \nu \circ \tau$ в произведение независимых циклов. Все циклы перестановки ω разбиваются на “кластеры”, состоящие из циклов одинаковой длины. Перестановка μ переставляет все циклы одного кластера местами, и не перемешивает их с элементами из других кластеров. В том случае если перестановка μ на какой-то цикл действует степенью, то считаем что данный кластер состоит из одного цикла. Перенумерацией листов книжки добьемся того, что в кластере состоящем из циклов $(a_{11}, \dots, a_{1n})(a_{21}, \dots, a_{2n})\dots(a_{k1}, \dots, a_{kn})$ перестановка μ содержит цикл $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, a_{1l}, a_{2l}, \dots)$.

Пусть элемент $\tau(a_{11})$ принадлежит множеству элементов цикла $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$. В этом случае данный цикл обязан иметь четную длину. Получаем, что $n = 2m$, $\tau(a_{11}) = a_{1\ m+1}$. Далее, $\tau(a_{21}) = \tau\mu(a_{11}) = \mu\tau(a_{11}) = \mu(a_{1\ m+1}) = a_{2\ m+1}$. Продолжая этот процесс заключаем, что перестановка τ действует одинаково на все элементы данного кластера, оставляя их в одном цикле. Перестановка $\nu = \omega \circ \tau^{-1}\mu^{-1}$ также действует лишь на элементы данного кластера. Следовательно, пользуясь связностью книжки, получаем что кластер только один, а полученная книжка принадлежит серии $A^*(k)$.

Пусть элемент $\tau(a_{11}) = a_{ml}$ принадлежит множеству элементов того же кластера, к которому принадлежит цикл a_1 , однако не принадлежит элементам цикла a_1 (т.е. $m > 1$). Имеем, $\tau(a_{12}) = \tau\omega(a_{11}) = \omega\tau(a_{11}) = \omega(a_{ml})$. Продолжая этот процесс, получаем, что τ переставляет элементы цикла a_1 и цикла a_m . Далее, $\tau(a_{21}) = \tau\mu(a_{11}) = \mu\tau(a_{11}) = \mu(a_{ml})$. Если число циклов в кластере равно двум, то $\mu(a_{ml})$ содержится в первом цикле. Если же оно больше двух, то $\mu(a_{ml}) = a_{m+1l}$. Действие перестановки τ на циклы данного кластера разбивает их на пары, следовательно, число циклов в данном кластере четно и $k = 2m$. В этом случае опять получаем, что если книжка связна, то циклы перестановки ω объединяются в один кластер, а соответственная книжка принадлежит серии $A(Y_n)$.

Наконец, пусть элемент $\tau(a_{11})$ принадлежит множеству элементов другого кластера. Перенумеруем листы, соответствующие номерам элементов второго кластера, так, чтобы $\tau(a_{11}) = b_{1s}$, где $b_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n})$ – первый цикл второго кластера. Пользуясь коммутированием перестановок ω и τ получаем, что $\tau(a_1) = b_1$. А пользуясь коммутированием μ и τ получаем, что $\tau(a_i) = b_i$ для всех остальных циклов кластеров. Получаем, что данные кластеры содержат одинаковое число циклов равной длины. Других кластеров, опять же пользуясь связностью книжки, перестановка ω не имеет, а значит книжка принадлежит серии $A(X_n)$. ■

Утверждение 3 Окрестность фокального слоя интеграла $\Lambda = b$ в трехмерной изокэнергетической поверхности связной бильiardной книжки, склеенной из конечного числа треугольных областей A'_1 , имеет структуру расслоения Зейфорта и послойно гомеоморфна:

- в случае книжки $A^*(k)$ трехмерному атому $A^{*...*}$, где число звездочек равно k ;
- в случае книжек $A(Y_k)$ и $A(X_k)$ трехмерному атому Y_k и X_k соответственно;
- в случае книжки $A'_1(k, n)$ прямому произведению двумерного тора на интервал.

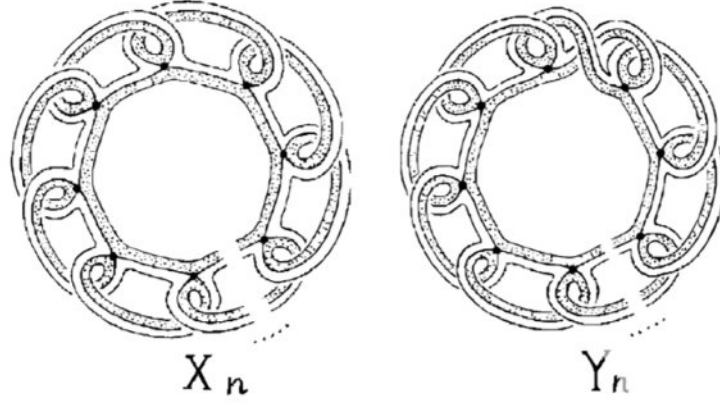


Рис. 3: Базы трехмерных атомов X_n и Y_n и дубли атома $A^*(k)$.

Доказательство.

Начнём доказательство с описания особого слоя $\Lambda = b$. Напомним, что на данном слое траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы семейства квадрик. Все траектории делятся на два класса – лежащие на фокальной прямой и все остальные. Без ограничения общности, можно считать, что на границу листов бильярдной книжки попадает правый фокус семейства квадрик. Фиксируем произвольный лист. Каждой точке внутренности листа соответствуют ровно четыре точки особого слоя, различающиеся направлением векторов скорости. Введём следующие обозначения. Вектором первого типа (и соответствующую точку слоя) назовём вектор направленный от правого фокуса, вектором второго типа – вектор, направленный от левого фокуса, вектором третьего типа – вектор, направленный к левому фокусу, и наконец вектором четвертого типа – вектор, направленный к правому фокусу. Таким образом, каждому листу книжки соответствуют четыре типа участков особого слоя, различающихся направлением векторов скорости (см. рис.4). Эти четыре участка удобно представлять в виде пятиугольников и четырёхугольников. А именно, участок второго (аналогично третьего) типа это четырёхугольник, стороны которого соответствуют сторонам криволинейного треугольника A'_1 , один из углов расположен в фокусе, при этом сторона, лежащая на фокальной прямой, предполагается оснащаемой горизонтальными векторами скорости, направленными вправо (соотв. влево). Участок первого типа это пятиугольник, у которого две стороны, также как и в предыдущем случае, лежат на дугах квадрик, а три других соответствуют точкам, лежащим на фокальной прямой. Одна из них соответствует точкам между эллипсом и фокусом и оснащается векторами к левому фокусу, другая – точкам, лежащим в фокусе и оснащёнными векторами с положительной ординатой, а третья – точкам между фокусом и гиперболой, оснащёнными векторами скорости от фокусов. Аналогичным пятиугольником будем представлять участок четвертого типа. Для удобства изложения будем кодировать каждый такой участок особого слоя парой (a, i) , где a – номер листа бильярдной книжки (пользуясь вольностью речи мы будем иногда отождествлять понятия листа и его номера), а i – тип векторов, приписываемых соответствующим точкам данного листа.

Таким образом, мы разбили особый слой в объединение четырёхугольников и пятиугольников. Опишем теперь их склейку друг с другом. Пусть a – некоторый лист бильярдной книжки. Каждые четыре участка вида $(a, 1)$, $(\nu(a), 2)$, $(\mu(a), 3)$, $(\omega\tau^{-1}(a), 4)$ склеиваются друг с другом вдоль дуг эллипса и гиперболы, ограничивающих область A'_1 . Напомним здесь, что в силу коммутирования перестановок выполнено $\nu\mu(a) = \mu\nu(a) = \omega\tau^{-1}(a)$. Результат склейки удобно представлять себе в виде четырёхугольника, в которого горизонтальные стороны соответствуют участкам движения по фокальной прямой, а вертикальные – фокусам (см. рис.4). При этом углам четырёхугольника соответствуют точки фокусов, оснащенные горизонтальными векторами скорости. Вдоль стороны, лежащей на границе участка четвертого типа, происходит склейка данного четырёхугольника с другим четырёхугольником, а именно, состоящим из участков $(\omega(a), 1)$, $(\omega\nu(a), 2)$, $(\omega\mu(a), 3)$, $(\omega^2\tau^{-1}(a), 4)$ – так как склейка на фокальной прямой происходит по перестановке τ . Продолжим склейку четырёхугольников вдоль вертикальных участков границ (соответствующих склейкам в фокусе). Пусть t – длина цикла перестановки ω . Тогда четырёхугольник из участков

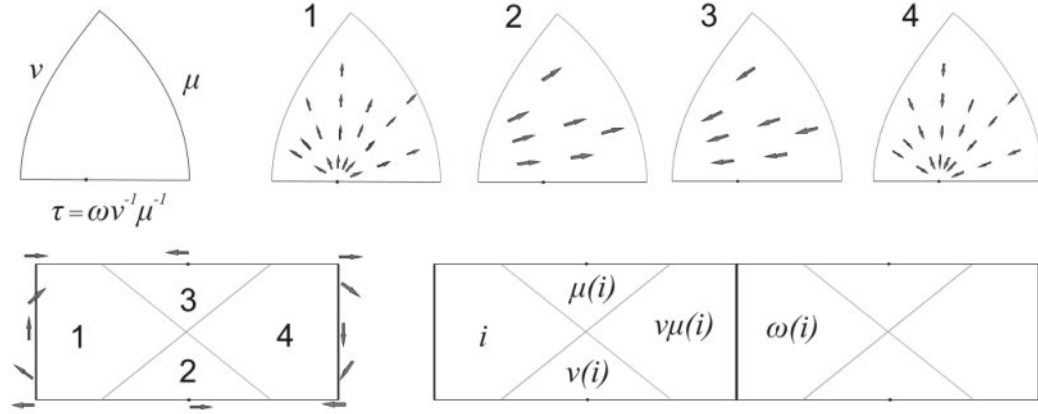


Рис. 4: Разбиение особого слоя на участки 1–4, кодирующие направление векторов скорости. Склейка таких участков в четырехугольники и склейка четырехугольников друг с другом. Красными стрелками указаны примеры векторов скорости на каждом участке, а также направление векторов скорости в фокусах на границах четырехугольников.

$(\omega^{t-1}(a), 1)$, $(\omega^{t-1}\nu(a), 2)$, $(\omega^{t-1}\mu(a), 3)$, $(\omega^t\tau^{-1}(a), 4)$ отождествляется с самым первым четырехугольником вдоль сторон, лежащих в фокусе. Результат склейки гомеоморфен цилиндру (или кольцу). Более того, циклы перестановки ω находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми подобными кольцами. Весь особый слой разбивается в объединение колец, склеенных вдоль границ. При этом траектории бильярда на особом слое либо проходят по границе колец (и являются критическими траекториями), либо лежат строго во внутренности фиксированного кольца, сматываясь с одной границы и наматываясь на другую.

Особый слой целиком получается в результате склейки описанных выше колец. Эти склейки могут быть двух типов. Первый тип склеек – это отождествление частей границ четырехугольников и пятиугольников, соответствующих одним и тем же листам.

А именно, отождествляются стороны пятиугольника $(a, 1)$ и четырехугольника $(a, 2)$, соответствующие отрезку фокальной прямой между фокусом и эллипсом. Вдоль этих же сторон происходит отождествление сторон $(a, 3)$ и $(a, 4)$. Вдоль сторон, соответствующих отрезку фокальной прямой между гиперболой и фокусом склейка уже другая, а именно, отождествляются $(a, 1)$ и $(a, 3)$, а также $(a, 2)$ и $(a, 4)$.

Для удобства изложения, назовём сторону четырехугольника из участков $(a, 1)$, $(\nu(a), 2)$, $(\mu(a), 3)$, $(\omega\tau^{-1}(a), 4)$ к которой примыкают участки $(\mu(a), 3)$ “верхней”, а участки $(\nu(a), 2)$ соответственно “нижней” (как на рис.4). Распространим данное определение и на границы колец, которые состоят из указанных четырехугольников.

Рассмотрим отождествляющиеся между собой стороны пятиугольника $(a, 1)$ и четырехугольника $(a, 3)$, расположенные на фокальной прямой между гиперболой и фокусом. В каких кольцах они расположены? Кольцо, содержащее четырехугольник $(a, 3)$ принадлежит кольцу, которое содержит пятиугольник $(\mu^{-1}(a), 1)$. Отметим здесь, что склейка части границы кольца по непрерывности распространяется и на всю границу (то есть достаточно разобрать только один тип склейки участков). Заключаем, что первый тип склеек выглядит так. “Нижняя” часть границы кольца, содержащего пятиугольник $(a, 1)$ отождествляется с “верхней” частью границы кольца, содержащего пятиугольник $(\mu^{-1}(a), 1)$. Предположим, что циклов в перестановке ω больше одного. Тогда подействовав перестановкой μ на некий элемент цикла перестановки ω мы получим элемент другого цикла. Так как перестановка μ , а следовательно μ^{-1} циклически действует на циклы перестановки ω , то в результате таких склеек все кольца склеятся либо в один либо в два тора. При этом два тора возможны только в том случае, если циклы перестановки ω разбиваются на два “кластера” относительно перестановки μ (в обозначениях, введенных в доказательстве утверждения 2).

Второй тип склеек колец – это склейки, происходящие из отождествления листов по перестановке τ . Такие склейки описываются следующим правилом – “верхняя” (аналогично, “нижняя”) граница кольца, содержащего пятиугольник $(a, 1)$ отождествляется с “верхней” (соотв., “нижней”) границей кольца, содержащего пятиугольник первого типа с номером $(\tau(a), 1)$. В случае книжки $A'_1(k, n)$ такая перестановка тождественна,

и склейки такого типа не происходят. Отсюда заключаем, что особый слой гомеоморфен двумерному тору. Во всех остальных случаях наличие транспозиций в перестановке τ приводит к необходимости попарных склеек вдоль семейства некоторых кривых на найденных выше торах, в результате особый слой станет гомеоморфным особому слою некоторого трехмерного атома. Отдельно отметим, что в случае книжки $A^*(k)$ такая склейка фактически превращает каждое кольцо в бутылку Клейна (отождествление двух листов Мёбиуса – окрестностей “верхней” и “нижней” границы каждого кольца по общей окружности). Все граничные окружности колец дважды накрывают критические траектории. Особый слой в этом случае имеет вид особого слоя атома со звёздочками, где число звёздочек равно числу особых окружностей и равно количеству колец. Ниже мы покажем это более подробно.

Рассмотрим теперь, что происходит с кольцами в том случае, если уровень интеграла близок к критическому, но является регулярным. Отметим, что на каждом кольце дуга граничного эллипса (а также гиперболы) листов биллиардной книжки изображается как семейство гомологичных кривых, соединяющих границы кольца. На уровне интеграла $\Lambda < b$ траектории лежат на касающихся эллипса прямых. Слой при проекции на данные кольца изображается как некоторая окрестность указанных кривых, соответствующих граничному эллипсу. Таким образом, от каждого кольца остается некоторый набор четырехугольников, количество которых равно длине цикла перестановки ω . Как данные четырёхугольники склеиваются друг с другом? От вышеуказанных склеек колец остаются склейки только второго типа (соответствующие перестановке τ), а склейки первого типа не происходят. Поясним. К примеру, согласно одной из них вектора первого (от правого фокуса) и второго типа (от левого) отождествлялись на участке между правым фокусом и эллиптической границей. На регулярном слое $\Lambda < b$ вектора данных типов различаются, оба они направлены от каустики к границе, однако их направление относительно оси абсцисс различно – вектор первого типа направлен внутрь биллиардной области, а вектор второго типа – наружу. Поэтому данная склейка должна быть отменена. Склейка векторов третьего и четвертого типа на этом же отрезке также отменяются в силу аналогичных рассуждений.

Вдоль одной из новых границ происходит склейка попарная склейка набора четырёхугольников из кольца i с набором четырехугольников из кольца $\mu(i)$ (напомним, что перестановка μ была приписана эллиптической границе). В результате этих склеек получится один или два тора (в зависимости от конкретных параметров набора перестановок). Аналогично разбирается случай $\Lambda > b$, где необходимо заменить семейство кривых, а также отметить, что новая склейка четырехугольников будет происходить по перестановке ν .

Расслоим все кольца параллельно границам. На биллиарде каждая такая окружность изображается как криволинейный треугольник (быть может вырожденный, если соответствующая прямая проходила через вершину треугольников второго и третьего типов). Такое расслоение задаёт нам структуру расслоения Зейферта как на особом слое, так и на близких регулярных слоях (в этом случае данные кривые получаются из частей указанных кривых, попавших в четырёхугольники). Один из примеров набора таких кривых в проекции на листы биллиардной книжки изображён на рис. 5.

Для завершения доказательства необходимо предъявить базу указанного расслоения Зейферта. Рассмотрим отдельно каждый случай книжек X_k , Y_k и $A^*(k)$.

Пусть книжка имеет вид X_k . Напомним, что в этом случае кодирующие её перестановки таковы, что существует нумерация листов книжки такая, что все они разбиваются на два кластера (назовём их листы a и листы b) так что, перестановка ω состоит из $2k$ циклов длины n вида

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), b_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), \dots, b_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn});$$

перестановка μ переставляет циклы ω местами и в частности содержит два различных цикла вида

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, a_{1m}, \dots) \text{ и } (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{k1}, b_{1m}, \dots),$$

а состоящая из транспозиций перестановка τ переставляет местами элементы циклов a_j и b_j .

Занумеруем описанные выше кольца номерами соответствующих циклов перестановки ω , так что в каждом кольце находились номера листов пятиугольников, соответствующих векторам первого типа (от правого фокуса). В каждом кольце с номерами $j \in \{1..k-1\}$ выберем пару из склеенных пятиугольника и четырёхугольника $(a_{j1}, 1)$ и $(\mu(a_{j1}), 3)$ для колец первого кластера и пару $(b_{11}, 1) := (\tau(a_{j1}), 1)$ и $(\mu(b_{11}), 3)$ для колец второго кластера. В каждой паре рассмотрим кривую, проекция которой на биллиард является дугой софокусной гиперболы. Такие кривые склеиваются друг с другом посредством склеек колец. Для колец первого кластера

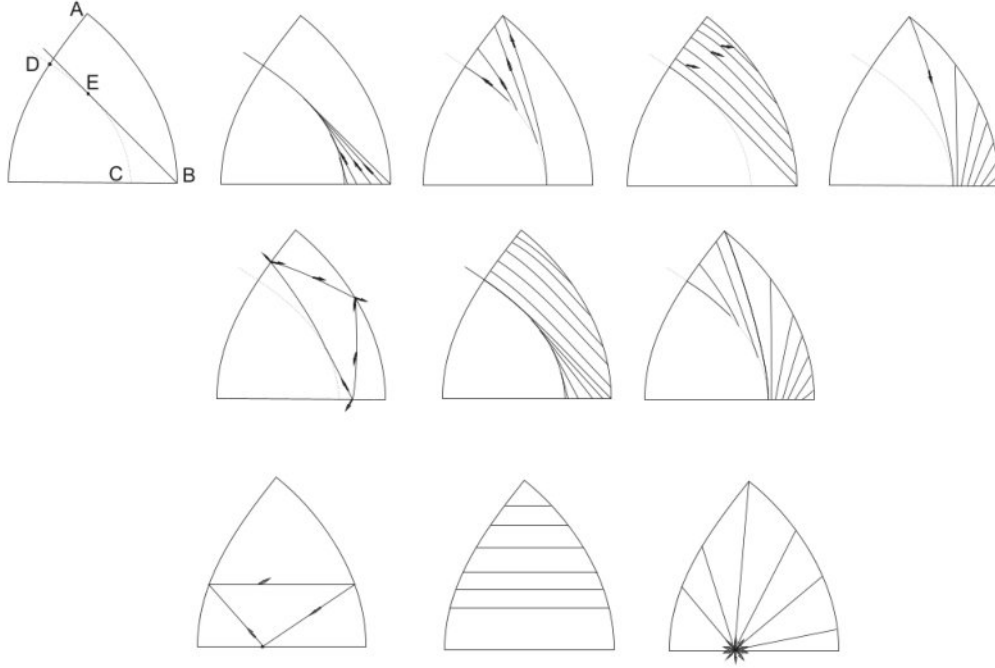


Рис. 5: Примеры кривых, задающих слоение Зейферта вблизи фокального особого слоя бильярдной книжки. Каждая такая кривая состоит из четырех или двух (для выделенных случаев) частей.

верхний конец кривой, находящейся в четырёхугольнике $(\mu(a_{j1}), 3)$ на кольце с номером j , отождествляется с нижним концом кривой, находящейся в пятиугольнике $(\mu(a_{j1}), 1) = (a_{j+1,1}, 1)$ на кольце с номером $j + 1$. На указанных кольцах такие кривые пересекают все слои расслоения Зейферта ровно один раз. Для того чтобы кривые замкнулись, на оставшейся паре колец быть может необходимо выбрать другие кривые. Для этого найдём такое r , что $\mu^k \omega^r = id$. Это можно сделать, так как перестановка μ циклически переставляет отдельно циклы a и отдельно циклы b (а их ровно k штук). Теперь в кольце a_k вначале выберем проектирующиеся в некоторую гиперболу две кривые α и β , расположенные в пятиугольнике $(\mu^{k-1}(a_{11}), 1) = (a_{k1}, 1)$ — кривая α , и в четырёхугольнике $(\omega^r \mu^k(a_{11}), 3) = (a_{11}, 3)$ — кривая β . Соединим в кольце a_k концы кривых α и β кривой, параллельной границе кольца. Найденную кривую легко изменить на гомологичную так, чтобы она пересекала все слои расслоения Зейферта ровно один раз. При этом её конец, лежащий в участке $(a_{11}, 3)$ отождествляется с концом ранее найденной кривой в кольце a_1 , лежащем в участке особого слоя $(a_{11}, 1)$. Аналогично поступаем с кольцом b_k . В результате получим набор кривых, которые будучи отождествлены друг с другом вдоль концов, расположенных на границе колец, образуют сечение S расслоения Зейферта.

Каждая точка на нижней части кольца a_i выбранного сечения S соответствует некоторой седловой точке. Данная точка отождествляется с точкой нижней части кольца b_i и с двумя точками на верхней части колец a_{i-1} и b_{i-1} (если $i = 1$, то колец a_k и b_k). Ей отвечают две исходящие сепаратрисы расположенные в пятиугольниках, и две входящие сепаратрисы, отвечающие участкам, расположенным в четырёхугольниках. Изобразим эти точки и сепаратрисы на плоскости так, чтобы отделить участки сепаратрис, проходящие по кольцам кластеров a и b (см. рис. 6). Каждый крест мы условно поделим на два “полукреста”, из которых “верхний” полукрест отвечает участкам особого слоя, лежащим в кольце кластера a , а нижний — участкам, отвечающим в кольце кластера b . При этом обе сепаратрисы в одной части полукреста расположены в одном листе книжки. Таким образом если верхние сепаратрисы отвечают листам i , то нижние — листам $\tau(i)$.

Склейка в кольцах вдоль дуг гипербол индуцирует склейку окрестностей этих точек друг с другом так как изображено на рис. 6. Голубые участки сверху и снизу отвечают уровням интеграла $\Lambda < b$ — так как склеек

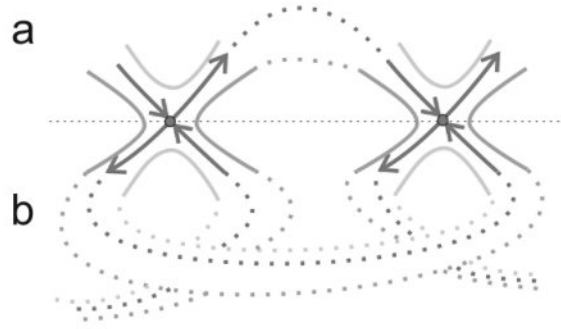


Рис. 6: Склейка окрестностей особых точек сечения S расслоения Зейферта.

вдоль отрезка от фокуса до эллипса на этих уровнях не происходит. Склейки колец остаются склейками только одноименных участков, отвечающих векторам первого и третьего типов (на регулярном уровне их смысл – от каустики и к каустике по направлению к граничной гиперболе соответственно). При этом все склейки происходят только по перестановке μ , которая не перемешивает листы различных кластеров друг с другом. Оранжевые участки отвечают уровням интеграла $\Lambda > b$. Соответствующие склейки вблизи особых точек происходят по перестановке τ , которая меняет элементы кластеров местами. В результате получается особый слой двумерного атома X_k , где k – это количество пар колец, т.е. особых точек.

Разберем теперь случай книжки Y_k . Отличие её от предыдущего случая состоит в том, что перестановка μ переставляет все циклы перестановки ω местами, т.е. в частности, содержит цикл вида

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, b_{11}, b_{21}, \dots, b_{k1}, a_{1m} \dots).$$

Для выбора сечения S соответствующего расслоения Зейферта вначале поступим аналогично. Занумеруем кольца особого слоя циклами перестановки ω и выберем в кольцах с номерами меньшими k ранее выбранные кривые. Теперь подберем такое r , что $\mu^k \omega^r = \tau$. Это возможно так как перестановки μ^k и τ одинаково действуют на номера циклов перестановки ω . Значит, добавляя подходящую степень перестановки ω , можно добиться указанного равенства. Значит, кольцо a_k содержит следующие участки особого слоя: участок $(\mu^{k-1}(a_{11}), 1)$, склеенный с ним участок $(\mu^k(a_{11}), 3)$ а также участок $(\mu^k \omega^r(a_{11}), 3) = (\tau(a_{11}), 3)$. По ним пройдет аналогичная предыдущему случаю кривая из S , один конец которой расположен на части $(\mu^{k-1}(a_{11}), 1)$, а другой конец – на части $(\tau(a_{11}), 3)$. На кольце b_k выбор кривой аналогичный. Такая кривая имеет концы на участках $(\mu^{k-1}\tau(a_{11}), 1)$ и $(\tau^2(a_{11}), 3) = (a_{11}, 3)$. Последнее равенство верно, так как все циклы перестановки τ имеют длину два. Полученные кривые будучи отождествлены на границах колец образуют искомое сечение S . Однако по сравнению с книжкой вида X_k одна из склеек “крестов” – окрестностей особых точек – будет выглядеть иначе.

А именно, склейка исходящих сепаратрис последнего “креста”, отвечающего особой точке на нижней части колец с номером k и входящих сепаратрис первого “креста”, отвечающих особой точке на верхней части этих же колец. В самом деле, исходящая сепаратриса последнего креста, проходящая по участку на кольце a_k отождествляется на этом кольце со входящей сепаратрисой первого креста, проходящей по четырёхугольнику $(\tau(a_{11}), 3)$. Однако такая сепаратриса отвечает “нижней” части первого полукреста. Аналогично, исходящая сепаратриса последнего креста, проходящая по участку в кольце b_k отождествляется с входящей сепаратрисой первого креста, проходящей по четырёхугольнику $(a_{11}, 3)$. Такая “перекрутка” приводит к тому, что база расслоения Зейферта становится послойно гомеоморфной 2-атому Y_k .

Для книжки $A^*(k)$ можно поступить обоими указанными выше способами. В этом случае мы получим не саму базу расслоения Зейферта, а так называемый “дубль” – разветвленное двулистное накрытие над искомой базой. ■

Отметим, для вычисления инварианта Фоменко-Цишанга, кодирующего слоение Лиувилля изоповерхностной билиардной книжки, необходимо последовательно сделать следующие шаги. Во-первых,

изучить особые слои. Они делятся на два класса. К первому классу относятся слои, траектории на которых (или их продолжения) лежат на прямых, проходящих через фокусы семейства квадрик. Назовем такой особый слой фокальным. Ко второму классу относятся слои, траектории на которых не могут быть корректно всюду определены. Такие слои соответствуют невыпуклым склейкам. Вторым шагом при вычислении инварианта, является вычисление меток, для этого необходимо установить на окрестностях указанных особых слоев структуру расслоения Зейферта, согласованную со слоением Лиувилля. Это позволит по правилам, указанным в работах А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова и Х.Цишанга [6] инвариантным образом указать базис в группе гомологий граничных торов данных бифуркаций. Метки инварианта – это некоторые функции, зависящие от элементов матриц перехода между базисами, соответствующих различным бифуркациям. Следовательно, указание структуры расслоения Зейферта в дальнейшем позволит эффективно вычислить данный инвариант.

Структура расслоения Зейферта для бифуркаций, возникающих вследствие невыпуклых склеек задаётся естественным образом. Слои в данном случае это прообразы дуг софокусных эллипсов или гипербол. Аналогичная структура возникает для слоёв, не содержащих прообразов фокусов билиардной книжки. Тем не менее, при доказательстве предыдущего утверждения была естественным образом задана структура расслоения Зейферта в окрестности фокального особого слоя, содержащего прообраз хотя бы одного фокуса. Однако, данный особый слой гомеоморфен особому слою одного из трех известных атомов-бифуркаций. Напомним здесь, что согласно теореме Ведюшкиной-Харчëвой для произвольного боттовского атома-бифуркации алгоритмически строится билиардная книжка, чья окрестность фокального особого слоя послойно гомеоморфна данному атому-бифуркации. Однако данная билиардная книжка не содержит фокусов, а склеена из билиардов вида A_0 (или их половин A'_0).

Теорема 1 Пусть дана билиардная книжка $\mathbb{B}$, листы которой ограничены дугами квадрик одного и того же софокусного семейства. Тогда окрестность фокального уровня в изоэнергетической поверхности является многообразием Зейферта. Все особые слои расслоения Зейферта являются подмножеством критических траекторий, проходящих по отрезкам фокальной прямой. Если траектории на особом слое проходят через фокус семейства, то они лежат на особом слое атома X_n , Y_n или A^{***} .

Доказательство. Рассмотрим траекторию на особом слое билиардной книжки. Пусть такая траектория не проходит через фокусы семейства квадрик. Зафиксируем связную часть особого слоя, содержащую данную траекторию. Напомним, что особые траектории слоя лежат на фокальной прямой. На данной связной части рассмотрим особую траекторию. Она не проходит через фокусы (так как в противном случае исходная траектория также проходила через фокусы). Тогда она заключена либо между дугами софокусных гипербол либо между дугами софокусных эллипсов. Тогда прообразы дуг гипербол в первом случае (и эллипсов во втором) задают структуру искомого расслоения Зейферта.

Пусть траектория на особом слое билиардной книжки проходит через фокусы. Предъявим книжку, склеенную из листов A'_1 , фокальный слой которой гомеоморфен связной части особого слоя исходной билиардной книжки. Для начала изменим структуру листов исходной билиардной книжки, заменив (разрезав) листы-эллипсы на четыре четверти (вдоль осей) и листы вида A_1 на две части (разрезами вдоль фокальной прямой). Очевидно, что это меняет комбинаторную структуру комплекса но не влияет на динамику системы. Определим три действия на части листов A'_1 , входящих в состав подразбитой билиардной книжки. Вначале зафиксируем лист A'_1 , на границе которого лежит фокус F (можно считать что это правый фокус семейства квадрик), через который проходит найденная выше траектория. Рассмотрим точку на фокальной прямой левее фокуса F и дугу фокальной гиперболы, проходящей через данную точку. Оснастим её векторами скорости от левого фокуса. Будем двигаться от фокальной прямой к границе области A'_1 . После достижения корешка билиардной книжки продолжим движение по дуге этой же гиперболы на новом листе, заменив направление вектора скорости, согласно билиардному закону на этом корешке. В силу конечности листов в какой-то момент при таком движении мы попадем обратно на фокальную прямую. Зафиксируем первый лист A'_1 (вообще говоря, не совпадающий с начальным) на котором это произойдет. Заметим, что при этом вектора скорости, соответствующие дуге, были направлены к правому фокусу. Назовём данную операцию “смещением вдоль гиперболы”. Такая операция сопоставляет одному листу A'_1 другой лист A'_1 . Аналогично введем “смещение вдоль эллипса”. Для этого рассмотрим точку на фокальной прямой правее фокуса F и дугу софокусного эллипса, через неё проходящую. Вектора скорости – направлены от фокусов. Выбирая на стартовом листе

A'_1 на дуге эллипса вектора от правого фокуса и двигаясь по дуге эллипса в силу конечности листов в конце концов вновь окажемся на листе типа A'_1 . Третья операция – переход через фокальную прямую. Листу A'_1 сопоставим лист, склеенный с данным вдоль фокальной прямой. Рассмотрим для исходного листа орбиты действия всевозможных композиций указанных выше действий. На полученных листах A'_1 смещение вдоль гиперболы можно задать некоторой перестановкой μ , смещение вдоль эллипса – перестановкой ν , а переход через фокальную прямую – перестановкой τ . В силу коммутирования перестановок исходной книжки, данные перестановки также будут коммутировать. Особый слой бильярдной книжки, склеенной из найденного числа экземпляров бильярдных A'_1 очевидно, будет гомеоморфен связной компоненте рассматриваемого особого слоя. Слоение Зейферта на бесфокусные листы естественным образом продолжается как смещение вдоль дуг эллипса или гипербол (или их композиции для так называемых “диагональных” листов). Использование предыдущего утверждения завершает доказательство теоремы. ■

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РФФИ № 22-71-10106.

Список литературы

- [1] А.А. Глузюк, “О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны” // ДАН, **481**:6 (2018), 594–598.
- [2] V. V. Fokicheva, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas” // Sb. Math., **205**:8 (2014), 1201–1221
- [3] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», 1999
- [4] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, “Генетическое введение в динамику систем с ударами”, М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [5] В.В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдных в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176
- [6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.
- [7] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдных” // Матем. сб., **210**:3 (2019), 17–74
- [8] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами” // ДАН, **479**:6 (2018), 607–610.
- [9] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” // Матем. сб., **209**:12 (2018), 17–56.
- [10] V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, “Billiard books of low complexity and realization of liouville foliations of integrable systems”, *Chebyshevskii sbornik* **23**(1), 53–82 (2022)