

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**«МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУБЫХ МОЛЕКУЛ
ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БИЛЛИАРДНЫМИ КНИЖКАМИ»**

Выполнила студентка
607 группы
Харчева Ирина Сергеевна

подпись студента

Научные руководители:
профессор, д.ф-м.н. Фоменко Анатолий Тимофеевич

подпись научного руководителя

ассистент, к.ф-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

подпись научного руководителя

Москва
2020 г.

Содержание

Введение.	2
1 Основные понятия.	3
2 Фазовое пространство бильярдной книжки класса b. Интегралы.	13
3 Атом. Грубая молекула.	16
4 Структура атомов.	20
5 Моделирование 3-атомов бильярдными книжками класса a.	24
6 Алгоритм моделирования любых грубых молекул бильярдными книжками класса b.	30
7 Примеры моделирования атомов и грубых молекул.	36
8 Доказательство корректности алгоритма моделирования любых грубых молекул	48
Заключение.	59

Введение.

Классической теории математического бильярда посвящено множество работ. Например, в книгах В. В. Козлова и Д. В. Трещева [1], С. Л. Табачникова [2], В. Драгович и М. Раднович [3] и статье Е. Гуткина [4] дается интересный обзор классических и новых задач в теории бильярда. Статья А. Плахова, С. Табачникова и Д. Трещева [5] посвящена проблеме “невидимости”. Статьи А. Глуцюка [6]–[8], М. Бялого, А. Е. Миронова [9]–[11] посвящены проблемам интегрируемости бильярда в зависимости от его границы.

Одним из известных примеров интегрируемых бильярдов является следующая динамическая система. Рассмотрим произвольную связную компактную область Ω в плоскости, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол (потребуем, чтобы в точках излома углы не превосходили π). Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и абсолютно-упруго отражается от гладкой части границы $\partial\Omega$. Такая динамическая система называется элементарным бильярдом, или бильярдом, ограниченным дугами софокусных квадрик.

Эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω со стандартным гамильтонианом, равным половине квадрата длины вектора скорости. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости такой системы необходим еще один первый интеграл. Оказывается, в элементарном бильярде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике — фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл Λ , независимый с предыдущим — параметр каустики. Это означает, что элементарный бильярд является интегрируемой системой (см. детали в [1]). Можно также показать, что в точках гладкости он является интегрируемой по Лиувиллю динамической системой.

Для динамических систем, интегрируемых по Лиувиллю, определены комбинаторные инварианты Фоменко-Цишанга: атомы, грубые и меченые молекулы (см. [12]–[15]). Атомы описывают локальную перестройку торov Лиувилля. Грубые молекулы двух систем позволяют определять, одинаковые ли у них базы слоений Лиувилля или нет. Меченые молекулы являются полным инвариантом таких систем. Совпадение меченых молекул двух систем говорит об их лиувиллевой эквивалентности — о том, что существует послойный диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию всех критических окружностей и ориентацию изоэнергетического многообразия. Инварианты Фоменко-Цишанга были вычислены для множества известных гамильтоновых систем, см., например, работы А. А. Ошемкова [16]–[18], П. В. Морозова [19, 20], Н. С. Славиной [21], В. А. Кибкало [22], С. С. Николаенко [23, 24], А. Ю. Москвина [25], Е. О. Кантонистой [26, 27], Д. С. Тимониной [28].

Итак, для элементарного бильярда можно вычислить инварианты Фоменко-Цишанга и сравнить его с другими системами, интегрируемыми по Лиувиллю. Это было сделано в работах [29] В. Драгович, М. Раднович, [30], [31] В. В. Фокичевой (Ведюшкиной).

Следующим шагом стало введение нового класса бильярдов, названных бильярдными книжками. Они получаются из элементарных путем изометричных склеек нескольких элементарных бильярдов вдоль гладких сегментов границы (дуг квадрик). Тогда можно определить более сложную динамику на получившемся клеточном комплексе следующим образом: материальная точка движется по прямой внутри областей, а при отражении переходит на другую область, склеенную с той, по которой она шла (подробнее см. ниже). Оказывается, дополнительный интеграл элементарных бильярдов порождает дополнительный интеграл бильярдных книжек. Поэтому такие бильярды будут также интегрируемыми, но при этом будут обладать более сложной структурой слоения Лиувилля на фазовом пространстве.

Биллиардная книжка, у которой вдоль любого гладкого сегмента границы склеено не более двух элементарных биллиардов, называется топологическим биллиардом. Топологические биллиарды хорошо изучены. Они были классифицированы в работе В.В. Фокичевой [32]. Кроме того, показано, что они Лиувиллево эквивалентны другим динамическим системам с более сложными интегралами, например, случаям динамики твердого тела (см. [33]) и интегрируемым геодезическим потокам на ориентируемых двумерных поверхностях (см. [34]).

Анализируя полученные результаты, А. Т. Фоменко предложил следующую гипотезу, которая состоит из 4-х частей (см. [35]).

Гипотеза (А. Т. Фоменко). Интегрируемыми биллиардными книжками можно моделировать:

- **(Гипотеза А)** любой атом или, другими словами, любую бифуркацию двумерных торов Лиувилля;
- **(Гипотеза В)** любую грубую молекулу, или, другими словами, базу любого слоения Лиувилля;
- **(Гипотеза С)** любую меченую молекулу, или, другими словами, любое слоение Лиувилля;
- **(Гипотеза D)** любое трехмерное замкнутое изоэнергетическое многообразие любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы. Гипотеза **D** является частным случаем гипотезы **C**.

Таким образом, была поставлена обратная задача. А именно, пусть дана меченая молекула. Можно ли сконструировать такой биллиард, для которого грубая молекула совпадет с изначально заданной? Положительный ответ на данный вопрос будет означать, что сложные интегрируемые гамильтоновы системы могут моделироваться наглядными биллиардными книжками с квадратичным интегралом — параметром квадратики. В этом случае сложность динамической системы будет отражаться на сложности клеточного комплекса биллиардной книжки, но динамика на этом клеточном комплексе будет описываться просто.

Гипотеза **A** была подтверждена в статьях В. В. Ведюшкиной, А. Т. Фоменко, И. С. Харчевой [36, 37]. Подтверждение гипотезы **B** является целью настоящей работы. Будет предъявлен явный алгоритм моделирования грубых молекул при помощи биллиардных книжек и доказана его корректность. Этот алгоритм будет использовать алгоритм моделирования атомов, описанный в статье [36]. При анализе слоений Лиувилля биллиардных книжек будут использованы методы, описанные в работах [30, 31, 32].

1 Основные понятия.

Определение 1. Пусть закон движения $x(t)$ материальной точки в некотором топологическом пространстве Ω является непрерывной функцией и однозначно определяется начальным положением $x_0 \in \Omega$ и начальным вектором скорости v_0 в некоторый момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого вектора скорости v_0 можно рассмотреть функцию, сопоставляющую начальному значению x_0 , закон движения $x(t)$ в пространстве непрерывных функций $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$. Если функция, отображающая начальное положение x_0 в пространство $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$, непрерывна, то будем говорить о *непрерывности закона движения $x(t)$ материальной точки в зависимости от начального положения*.

Определение 2. Рассмотрим некоторую компактную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается от гладкой части границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Тогда *бильярдом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

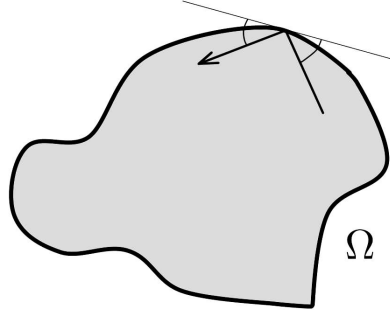


Рис. 1: Пример бильярда в произвольной области.

Замечание 1. Движение материальной точки по прямой внутри области и отражение ее от гладкой границы задает непрерывный закон движения относительно начального положения. Особые случаи, такие как, попадание траектории бильярда в угол излома и касание границы доопределяются так, чтобы закон движения все также оставался непрерывным относительно начального положения. Это свойство бильярда гарантирует непрерывность фазового потока на фазовом пространстве.

Замечание 2 (о первых интегралах в бильярдах). У динамической системы бильярда всегда есть один первый интеграл — гамильтониан, являющийся полной энергией системы и равный половине квадрата длины вектора скорости. Значит, бильярд является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости бильярда необходим еще один первый интеграл. В общем случае, для произвольной области Ω его может не существовать. Но если подобрать “хорошую” область Ω , то можно найти функцию, которая будет первым интегралом. Например, если Ω является прямоугольником, то интегралом является угол наклона траектории бильярда, если кругом — то интегралом является радиус окружности, которой касается траектория (см. рис. 2, 3). Есть еще один класс интегрируемых бильярдов, о котором пойдет речь ниже. Для его введения нам понадобится следующее определение.

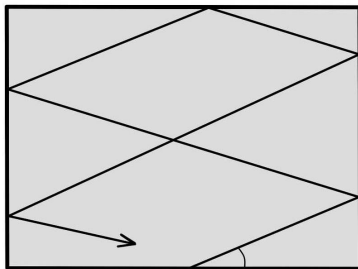


Рис. 2: Бильярд в прямоугольнике.

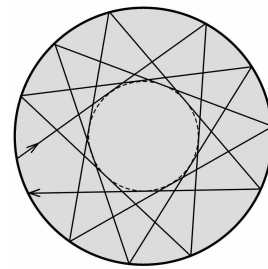


Рис. 3: Бильярд в круге.

Определение 3. Софокусным семейством (семейством софокусных квадрик) называется множество кривых на плоскости $\mathbb{R}^2$ с евклидовыми координатами (x, y) , описываемых уравнением

$$x^2 \cdot (b - \lambda) + y^2 \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad (1.1)$$

где $a > b > 0$ — параметры этого семейства, а число $\lambda \in (-\infty, a]$ — параметр кривой из этого семейства или параметр квадрики.

Параметры софокусного семейства a, b будут фиксированы на протяжении всей работы, поэтому в дальнейшем мы будем говорить просто о софокусном семействе, не уточняя его параметров.

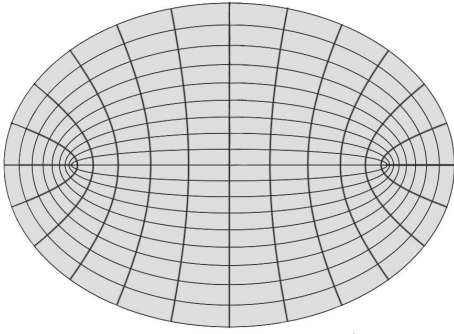


Рис. 4: Семейство софокусных эллипсов и гипербол.

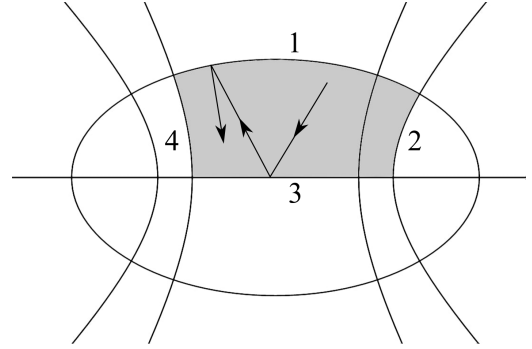


Рис. 5: Пример элементарного билиарда. 1, 3 — выпуклые дуги, 2, 4 — невыпуклые.

Замечание 3. Кривая из софокусного семейства является эллипсом при $\lambda \in (-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, прямой при $\lambda = a$ и при $\lambda = b$. Эллипсы и гиперболы из этого семейства имеют одни и те же фокусы и пересекаются под прямым углом. Прямая в случае $\lambda = b$ проходит через фокусы, а в случае $\lambda = a$ проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и ортогональна ему (см. рис. 4).

Определение 4. Рассмотрим элементарную билиардную область — компактную область Ω в плоскости $\mathbb{R}^2$, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик (см. пример на рис. 5), пересекающихся под углом $\frac{\pi}{2}$, направленным внутрь области Ω . Билиард в области Ω называется элементарным билиардом.

Определение 5. В элементарной билиардной области Ω дуга квадрики l называется выпуклой, если для каждой точки $x \in l$ существует такая окрестность $U(x)$, что $U(x) \cap \Omega$ является выпуклым множеством (см. рис. 5). В противном случае дуга называется невыпуклой.

Замечание 4 (об особых траекториях в элементарном билиарде). Опишем подробнее, как выглядит движение материальной точки элементарного билиарда в области Ω в случаях, отличающихся от отражения от гладкой части границы. Его мы определили исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Есть два случая такого движения.

1. Пусть траектория материальной точки, отвечающая закону движения $x(t)$, попала в угол излома. Из определения элементарной билиардной области следует, что он равен $\pi/2$. Без ограничения общности будем считать, что начальный момент времени t_0 был до попадания траектории в угол, но после последнего отражения от границы области, а также ориентируем область, как показано на рис. 6а. Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$. Тогда для одного подмножества (U_1

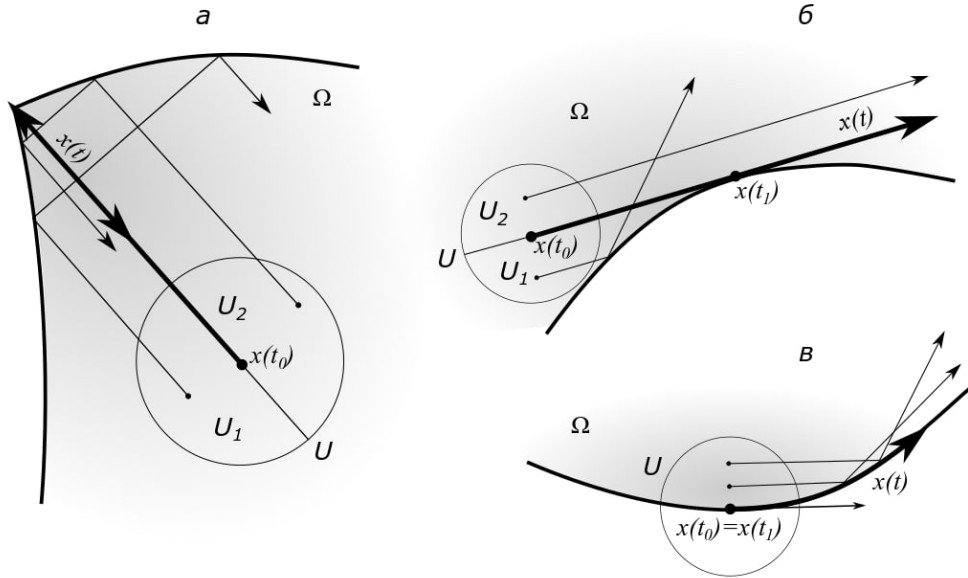


Рис. 6: Особые траектории в элементарном бильярде.

на рис. 6а) начальных значений из окрестности U есть траектории, в которых материальная точка отразилась от левой границы, а потом от верхней, для другого подмножества (U_2 на рис. 6а) — сначала от верхней, потом от левой. Причем, так как угол равен $\pi/2$, то предел с обеих сторон одинаковый: материальная точка идет по прямой, попадает в угол, отражается и идет в обратную сторону вдоль той же прямой.

- Пусть траектория $x(t)$ в момент времени t_1 касается гладкой части границы $\partial\Omega$. Если дуга, которой касается траектория невыпуклая, то материальная точка продолжает движение по прямой. Если выпуклая, то траектория идет вдоль границы. Такой результат можно получить, рассмотрев, как и в предыдущем случае, близкие траектории. В этих двух случаях они изображены на рис. 6б и 6в. На этих рисунках t_0 — начальный момент времени.

Из классической теоремы Якоби-Шаля вытекает следующее свойство элементарного бильярда (см. подробности в работе [1] В.В. Козлова и Д.В. Трещева).

Лемма 1. *Звенья любой траектории в элементарном бильярде либо лежат на касательных к фиксированной квадрике из того же софокусного семейства, что и граница элементарной бильiardной области, либо проходят через любой из фокусов (см. рис. 7).*

Определение 6. Кривая, которой касаются звенья траектории в элементарном бильярде, называется *каустикой (огibaющей)*.

Замечание 5 (об интегрируемости элементарного бильярда). Элементарный бильiard является интегрируемой гамильтоновой динамической системой с двумя первыми интегралами (см. стр. 105 в [1]): гамильтонианом H (полной энергией системы) и параметром каустики (поскольку каустика является кривой из фиксированного софокусного семейства, то ее можно задать одним параметром).

Подробнее фазовое пространство и формулы описанных выше интегралов будут представлены ниже для более общего случая.

Рассмотрим обобщение элементарного бильiardа: склеим несколько элементарных бильiardных областей (листов), и пусть материальная точка, ударяясь от границы, переходит с одного листа на другой (см. рис. 8).

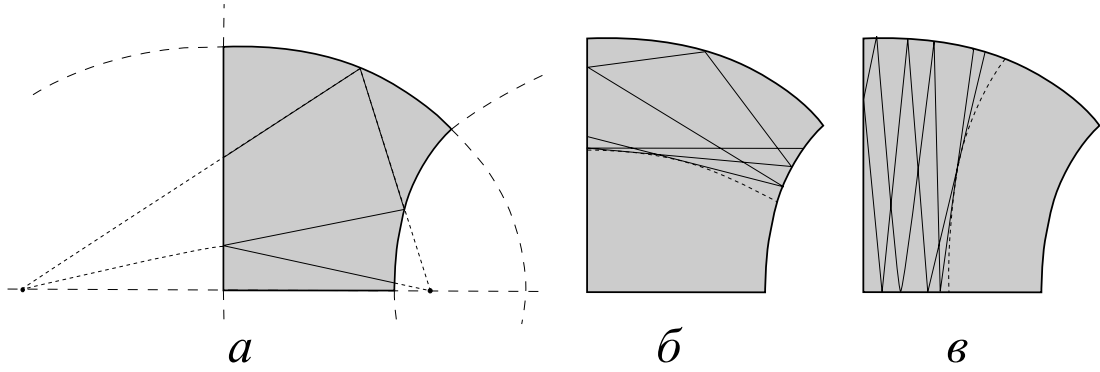


Рис. 7: Иллюстрация леммы 1.

Определение 7. Рассмотрим несколько элементарных бильярдных областей. Выберем из них несколько с общей, как подмножество плоскости, дугой квадрики. Склеим изометрично эти области вдоль этой квадрики. Такая операция называется *склеивкой элементарных бильярдных областей*.

Определение 8. Рассмотрим двумерный клеточный комплекс $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$, полученный несколькими склейками односвязных элементарных бильярдных областей, со следующим естественным разбиением на клетки. Двумерными клетками является внутренность этих элементарных бильярдных областей. Одномерными — дуги квадрик (гладкие сегменты границ этих областей). Нульмерными — точки излома границ этих областей.

Заметим, что на двумерных клетках этого комплекса можно ввести метрику, индуцированную метрикой плоскости, в которую эти области вложены. Клеточный комплекс X с метрикой на двумерных клетках X^2 называется *бильярдным комплексом*. Его двумерные клетки называются *листами*, одномерные — *корешками*, нульмерные — *угловыми точками*.

Также заметим, что на элементарных бильярдных областях по определению задано непрерывное вложение в плоскость $\mathbb{R}^2$. Значит, на двумерных клетках X^2 этого комплекса определено непрерывное отображение $\rho : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (это отображение уже не обязано быть вложением). Доопределим его на всем комплексе X по непрерывности. Получившееся отображение $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ бильярдного комплекса в плоскость называется *каноническим*.

Определение 9. *Бильярдной книжкой* $\mathcal{B}$ называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в бильярдном комплексе $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ (см. рис. 8) со следующими свойствами.

1. К корешкам $e^1 \in X^1$ приписаны перестановки $\Sigma[e^1]$, действующие на листах бильярдного комплекса и описывающие переход материальной точки с одного листа на другой.
2. Для любого корешка $e^1 \in X^1$ перестановка $\Sigma[e^1]$ является циклической перестановкой тех листов, границами которых является этот корешок.
3. Материальная точка внутри листов движется по прямой.
4. Если материальная точка с листа $e^2 \in X^2$ попадает на корешок $e^1 \in X^1$ под углом, то она переходит на другой лист по перестановке $\Sigma[e^1]$, либо абсолютно-упруго отражаясь от корешка e^1 , либо продолжая свое движение без отражения. Последнее

зависит от расположения листов e^2 и $\Sigma[e^1](e^2)$. Если они расположены по одну сторону от корешка e^1 , то материальная точка абсолютно-упруго отражается, если по разные — продолжает движение по прямой.

5. Если траектория касается некоторого невыпуклого (в смысле опр. 5) корешка $e^1 \in X^1$, к которому приписана нетождественная перестановка $\Sigma[e^1]$, то она не определена в точке касания;
6. В остальных случаях движение материальной точки возможно доопределить исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения.

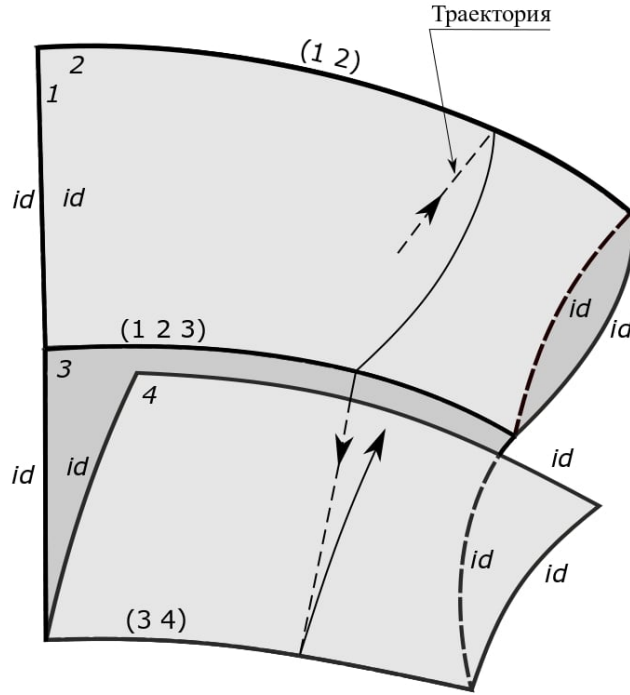


Рис. 8: Пример бильярдной книжки с 4 листами.

Замечание 6 (об интегрируемости бильярдной книжки). Рассмотрим образ канонического отображения ρ (см. опр. 8) любой траектории материальной точки в бильярдной книжке $\mathcal{B}(X, \Sigma)$. Получим некоторое движение в плоскости. Оно является либо движением по прямой, либо отражением от некоторой квадрики из фиксированного семейства. Значит, у такого движения есть те же функции, которые сохраняются вдоль траектории, что и у элементарного бильярда. Значит, в бильярдной книжке есть такие же первые интегралы, как и в элементарном бильярде: полная энергия и параметр каустики. Из этого следует, что бильярдная книжка так же, как и элементарный бильярд, является интегрируемой гамильтоновой динамической системой. Но главное преимущество обобщения элементарного бильярда в том, что динамическая система бильярдной книжки устроена сложнее и позволяет моделировать больший класс других интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Поэтому важно подробнее описать эту динамическую систему.

Замечание 7 (о невыпуклых склейках). Пусть корешок e^1 в бильярдной книжке $\mathcal{B}$ является невыпуклым хотя бы для одного листа, для которого он является границей, а перестановка $\Sigma[e^1]$ не является тождественной. Тогда траекторию, которая касается дуги e^1 , невозможно определить исходя из непрерывности закона движения материальной точки относительно начального положения. Это происходит из-за того, что есть

близкие ей траектории, которые продолжают движение по тому же листу, что и шли, и траектории, которые переходят по перестановке $\Sigma[e^1]$ на другой лист (рис. аналогичен рис. 6б). Поэтому траектория, которая касается такого корешка, не определена в точках касания согласно п. 5 опр. 9 бильярдной книжки.

Можно было бы запретить такие корешки (невыпуклые склейки). Тогда определялись бы все траектории, и фазовый поток был бы полным. Но нас в первую очередь интересуют слоения Лиувилля. А они корректно определены даже в случае невыпуклых склеек (см. подробнее ниже). То обстоятельство, что на некоторых слоях такого слоения интегральные траектории системы не определены, не влияет на бифуркации слоев слоения Лиувилля. Кроме того, для моделирования грубых молекул нам необходимы бильярдные книжки с невыпуклыми склейками, так как они обеспечивают необходимое число бифуркаций. Если все склейки выпуклы, то особых слоев всего три, а этого недостаточно для моделирования произвольной молекулы со сколь угодно большим числом седловых особенностей.

Замечание 8 (о нумерации листов бильярдной книжки). Для удобства описания перестановок введем нумерацию на листах $N : X^2 \rightarrow \mathbb{N}$ и будем рассматривать перестановки уже не на листах, а на их номерах. При этом обозначение бильярдной книжки расширяется до $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$. В расширенном определении бильярдные книжки считаются эквивалентными, если они совпадают с точностью до перенумерации листов.

Поскольку для моделирования грубых молекул нам понадобятся не все бильярдные книжки, выделим в их классе подклассы и далее будем работать только с ними. Для этого воспользуемся обозначением из классификации [31] В.В. Фокичевой (В.В. Ведюшкиной).

Определение 10. Зафиксируем гиперболу с некоторым параметром $\tilde{\lambda}$ и будем говорить, что элементарная бильярдная область имеет тип B_0 , если она ограничена слева вертикальной прямой (квадрикой с параметром a), справа гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$, сверху эллипсом с параметром 0, снизу эллипсом с произвольным параметром (см. рис. 9). Снизу дуга эллипса должна быть невыпуклой. Элементарная область типа A'_0 выглядит так же, за исключением того, что снизу она ограничена горизонтальной прямой, то есть квадрикой с параметром b (см. рис. 10).

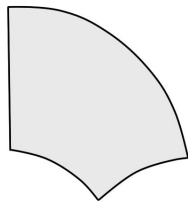


Рис. 9: Область B_0 .

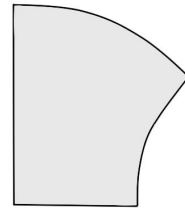


Рис. 10: Область A'_0 .

Определение 11. Бильярдная книжка принадлежит классу **a** (классу **b**), если все ее листы имеют тип A'_0 (B_0 или A'_0), и правым границам всех листов соответствуют тождественные перестановки, а нижним границам всех листов — нетождественные.

Замечание 9. Класс **b** бильярдных книжек расширяет класс **a**. Поскольку для моделирования грубых молекул необходимы бильярдные книжки класса **b**, то далее будем рассматривать только этот класс.

Определение 12. Пусть дана бильярдная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса **b**. Для каждого параметра квадрики $\lambda \in [0, a]$ определим перестановку $\sigma[\lambda]$, называемую *перестановкой*

на квадрике, как композицию всех перестановок, соответствующих таким одномерным клеткам, которые являются дугами квадрики с параметром λ . То есть,

$$\sigma[\lambda] = \prod_{e^1 \in X_\lambda^1} \Sigma[e^1],$$

где X_λ^1 — это множество одномерных клеток, являющихся дугой квадрики с параметром λ .

Замечание 10. Покажем, что определение 12 перестановки на квадрике корректно, то есть не зависит от порядка перемножения перестановок. Напомним, что для любого корешка e^1 перестановка $\Sigma[e^1]$ является циклической перестановкой листов, границами которых является этот корешок (см. опр. 9). Так как книжка $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathbf{b}$, то циклы в перестановках $\Sigma[e^1]$, т.ч. $e^1 \in X_\lambda^1$, не пересекаются. Значит, эти перестановки можно перемножать в произвольном порядке.

Для удобства будем записывать перестановки на квадриках в виде разложения в произведение независимых циклов, явно выписывая циклы длины один, поскольку каждый из циклов в разложении соответствует некоторому корешку.

Замечание 11. Согласно определению 12 перестановки на квадриках определены для каждого параметра $\lambda \in [0, a]$. Таким образом, получается параметрическое семейство перестановок $\sigma[\lambda]$. Но заметим, что только конечное число таких перестановок окажется нетождественными, поскольку корешков конечное число.

Лемма 2 (о коммутирующих перестановках). *Биллиардная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса $\mathbf{b}$ корректно определена тогда и только тогда, когда для любого параметра λ , соответствующего некоторому корешку, перестановки $\sigma[\lambda]$ и $\sigma[a]$ на квадриках коммутируют.*

Доказательство. Корректность биллиардной книжки может быть нарушена в том случае, когда не выполнен п. 6 определения 9 биллиардной книжки. То есть, только когда существует такое движение $x(t)$ материальной точки, которое невозможно доопределить исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Это может возникнуть, когда существует два принципиально разных, но при этом близких движения к $x(t)$. Изучим, когда такая ситуация может возникнуть. Для этого рассмотрим, какие могут возникать особые движения материальной точки (которые не покрываются п. 3-5 опр. 9).

- Материальная точка движется по выпуклой дуге e^1 . Тогда это движение можно всегда доопределить по непрерывности его закона относительно начального положения. Оно определяется аналогично п. 2 замечания 4 об особых траекториях в элементарном биллиарде. А именно, траектория идет вдоль выпуклой дуги, причем она принадлежит сразу всем листам, в границе которых содержится дуга e^1 . Эти листы циклическая перестановка $\Sigma[e^1]$ переводит нетождественно, то есть цикл $\Sigma[e^1]$ состоит из номеров этих листов.
- Материальная точка касается невыпуклой дуги, к которой приписана тождественная перестановка. В этом случае материальная точка продолжает движение по прямой.
- Траектория попадает в угловую точку. Здесь продолжение движения зависит от перестановок на квадриках.

Заметим, что во всех случаях, за исключением последнего, траекторию можно определить однозначно исходя из непрерывности закона движения материальной точки относительно начального положения. Таким образом, билиардная книжка корректно определена, тогда и только тогда, когда возможно определить любую траекторию, попавшую в некоторую угловую точку, исходя из этой непрерывности.

Покажем сначала, что если существует такой параметр $\lambda' \in [0, b]$, что перестановки $\sigma[\lambda']$ и $\sigma[a]$ не коммутируют, то существует траектория билиярда, продолжение которой невозможно определить после попадания в некоторую угловую точку e^0 так, чтобы закон движения материальной точки был непрерывен относительно начального положения. Так как $\sigma[\lambda'] \circ \sigma[a] \neq \sigma[a] \circ \sigma[\lambda']$, то существует такой лист i , что $\sigma[\lambda'] \circ \sigma[a](i) \neq \sigma[a] \circ \sigma[\lambda'](i)$.

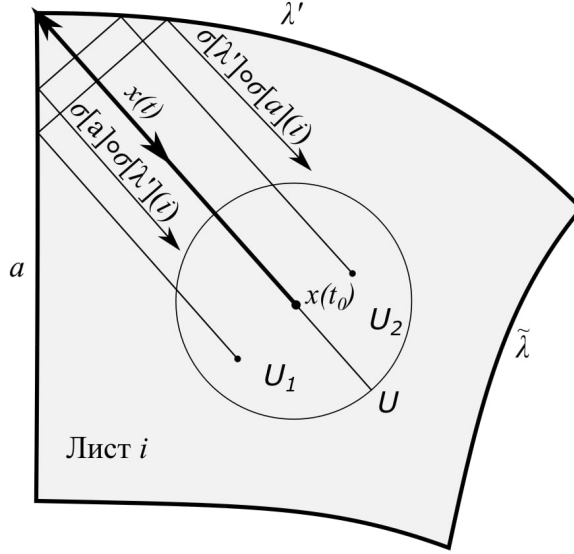


Рис. 11: Иллюстрация леммы 2 о коммутирующих перестановках.

Тогда рассмотрим траекторию, которая идет по i -му листу и попадает в угол на клетку e^0 , находящуюся на пересечении квадрики с параметром a (вертикальной прямой) и квадрики с параметром λ' (эллипса или горизонтальной прямой). Пусть она задается законом движения $x(t)$ с начальным моментом времени t_0 . Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$. Тогда для одного подмножества (U_1 на рис. 11) начальных значений из окрестности U есть траектории, в которых материальная точка отразилась от квадрики с параметром λ' и перешла на лист с номером $\sigma[\lambda'](i)$, а затем от вертикальной прямой и перешла на лист с номером $\sigma[a] \circ \sigma[\lambda'](i)$, для другого подмножества (U_2 на рис. 11) — наоборот. Таким образом, в любой окрестности U вершины угла есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах $\sigma[a] \circ \sigma[\lambda'](i)$ и $\sigma[\lambda'] \circ \sigma[a](i)$, а значит, однозначно непрерывно определить траекторию, попавшую в вершину угла на i -ом листе мы не можем, так как пределы с разных сторон не совпадают. Это обусловлено тем, что перестановки $\sigma[\lambda']$ и $\sigma[a]$ не коммутируют.

Обратно, пусть для любого параметра $\lambda \in [0, b]$ перестановки $\sigma[\lambda]$ и $\sigma[a]$ коммутируют. Тогда рассмотрим любую траекторию, попавшую на некоторую угловую точку e^0 . Пусть в точке e^0 пересекаются квадрики с параметрами λ' и λ'' , такими что $\lambda' < \lambda''$. В силу определения 10 одна из квадрик — либо вертикальная прямая, либо гипербола с параметром $\tilde{\lambda}$, то есть $\lambda'' = a$ или $\lambda'' = \tilde{\lambda}$. В первом случае траектория окажется на листе с номером $\sigma[a] \circ \sigma[\lambda'](i) = \sigma[\lambda'] \circ \sigma[a](i)$ и будет идти в противоположную сторону. Во-втором — траектория окажется на листе с номером $\sigma[\lambda'](i)$ и будет идти также в противоположную сторону, так как согласно определению 10 правая граница листов ни

с чем не склеена, то есть перестановка $\sigma[\tilde{\lambda}]$ тождественна. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3 (о конструировании бильярдной книжки класса $\mathbf{b}$ по семейству перестановок на квадраках). Пусть задано параметрическое семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ со следующими свойствами.

1. Есть только конечное число нетождественных перестановок из семейства $\sigma[\lambda]$. Они отвечают параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$, а также, возможно, 0 и a , таким что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k \leq b < a$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Обозначим через $N_0, N_1, N_2, \dots, N_k$ множества чисел, на которые действуют нетождественно перестановки $\sigma[0], \sigma[\lambda_1], \sigma[\lambda_2], \dots, \sigma[\lambda_k]$ соответственно. Тогда эти множества не пересекаются, а также верно $N_0 \subset \bigcup_{i=1}^k N_i$.
3. Перестановка $\sigma[a]$ коммутирует с любой другой перестановкой из семейства $\sigma[\lambda]$.

Тогда существует единственная бильярдная книжка класса $\mathbf{b}$ такая, что ее семейство перестановок на квадраках совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.

Доказательство. Итак, дано семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ с указанными выше свойствами. Построим по ним бильярдную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса $\mathbf{b}$ и покажем, что она единственная, у которой семейство перестановок на квадраках совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ рассмотрим множество чисел $N_i \subset \mathbb{N}$, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[\lambda_i]$. Количество листов бильярдной книжки класса $\mathbf{b}$ определено однозначно множеством $\bigcup_{i=1}^k N_i$, поскольку согласно определению 10 все листы такой книжки должны иметь нетождественную перестановку на нижнем корешке. Значит, эта перестановка возникнет в какой-нибудь из перестановок $\sigma[\lambda_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ при разложении их в независимые циклы.

Каждому числу $j \in N_i$ сопоставим лист e^2 бильярдной книжки $\mathcal{B}$. Этот лист будет ограничен сверху эллипсом с параметром 0, справа — гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$ (параметр $\tilde{\lambda}$ зафиксирован в опр. 10), слева — вертикальной прямой, то есть квадракой с параметром a , снизу — квадракой с параметром λ_i (эллипсом, если $\lambda_i < b$, или горизонтальной прямой, если $\lambda_i = b$). Снизу и справа границы невыпуклые, сверху и слева — выпуклые. Таким образом, этот лист будет типа B_0 , если $\lambda_i < b$, или типа A'_0 , если $\lambda_i = b$. Из условия 2 на семейство перестановок $\sigma[\lambda]$ следует, что существует единственное множество N_i , которое содержит число j . Значит, можно занумеровать этот лист номером j , то есть положим $N[e^2] = j$.

Поскольку бильярдная книжка $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathbf{b}$, то справа лист j ни с чем не склеивается, а перестановка, приписанная правому корешку — тождественная. Из этого в том числе вытекает, что перестановка $\sigma[\tilde{\lambda}]$ обязана быть тождественной.

Слева этот лист склеивается по перестановке $\sigma[a]$ следующим образом. Рассмотрим разложение перестановки $\sigma[a]$ в произведение независимых циклов. Найдем тот независимый цикл γ , в котором встречается номер j . Он может быть единичной длины. Тогда листы с номерами из этого цикла склеены между собой по левой границе, и к их общему корешку e^1 приписан этот цикл, то есть $\Sigma[e^1] = \gamma$.

Листы, с которыми этот лист склеен сверху, и перестановка, приписанная верхнему корешку, определяется по перестановке $\sigma[0]$ аналогично перестановке $\sigma[a]$. Склейка снизу определяется по перестановке $\sigma[\lambda_i]$ также аналогично.

Таким образом, для каждого листа однозначно определены его граница и перестановки, приписанные корешкам. Это значит, что бильярдный комплекс X и перестановки Σ задаются однозначно. Покажем, что получившаяся книжка корректно задана, и на ней можно определить движение материальной точки. Пункт 2 определения 9

бильярдной книжки выполняется по построению. Движение материальной точки на такой бильярдной книжке $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ задается оставшимися пунктами определения 9. Это движение можно корректно определить в силу леммы 2 о коммутирующих перестановках и условия 3 на семейство перестановок $\sigma[\lambda]$.

Из описанного выше построения и определения 12 семейства перестановок на квадриках следует, что для получившейся бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ это семейство совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1 (о конструировании бильярдной книжки класса **a** по трем перестановкам). *Пусть все перестановки параметрического семейства $\sigma[\lambda]$ с параметром $\lambda \in [0, a]$ тождественны, кроме перестановки $\sigma[b]$ и, возможно, перестановок $\sigma[0]$, $\sigma[a]$. А также, перестановка $\sigma[a]$ коммутирует двумя остальными, и множество чисел, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[0]$, содержит в себе множество чисел, на которые действует нетождественно перестановка $\sigma[b]$. Тогда по этому семейству однозначно строится бильярдная книжка класса **a**, такая что ее семейство перестановок на квадраках совпадает с семейством $\sigma[\lambda]$.*

Доказательство. Этот факт является частным случаем предыдущей леммы 3. В этом случае $k = 1$, $\lambda_1 = b$, а все листы имеют тип A'_0 и снизу ограничены горизонтальной прямой (квадрикой с параметром b). $\square$

2 Фазовое пространство бильярдной книжки класса **b**. Интегралы.

Рассмотрим бильярдную книжку $\mathcal{B}(X = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, N)$ класса **b**. Движение материальной точки по клеточному комплексу X задает динамическую систему бильярдной книжки $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ на некотором фазовом пространстве M^4 . Точка на фазовом пространстве должна описывать состояние этой системы. Его можно задать положением материальной точки на комплексе и вектором скорости. Считаем, что вектор скорости не равен нулю. На границе листов из-за отражения и перехода материальной точки с листа на лист, векторы скорости будут устроены сложнее: некоторые векторы необходимо будет склеить, чтобы движение отвечало движению материальной точки в бильярдной книжке.

Итак, нужно рассмотреть несвязное объединение всех листов, считая границу для каждого листа отдельно:

$$[X]^2 := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} \bar{e}^2. \quad (2.1)$$

Тогда фазовое пространство M^4 — это пространство кокасательного расслоения над $[X]^2$. Поскольку метрика плоская, то можем отождествить касательное и кокасательное расслоение. Учитывая отражение от границы листов и то, что вектор скорости не равен нулю, получаем:

$$M^4 = [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim, \quad (2.2)$$

где отношение эквивалентности описывает отражение от границы листов материальной точки и переход с листа на лист.

Опишем подробнее это отношение эквивалентности. Для этого нам понадобится определение проекции расслоения, введенное по аналогии с терминологией расслоений.

Определение 13. *Проекцией расслоения* назовем отображение $\pi : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow X$, которое является композицией проекции $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ на $[X]^2$ и отображения $[X]^2$ на X , отображающее двумерные клетки в себя тождественно, а их границу в соответствующие клетки меньшей размерности.

Функцию N (см. замечание 8 о нумерации листов биллиардной книжки), отвечающую номеру листа, можно расширить на многообразие $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ следующим естественным образом. Если $x \in X^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то $\tilde{N}(x, v) = N(x)$. На границе доопределяем функцию

$$\tilde{N} : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

по непрерывности. Поскольку границу каждого листа в $[X]^2$ мы считаем отдельно, то доопределить на границе по непрерывности мы можем.

Отношение эквивалентности в (2.2) задается по-разному в разных частях границы, так как отражение в них разное. А именно, есть три случая: первый — отражение от границы, второй и третий определяются из непрерывности закона движения материальной точки в зависимости от начального положения и были описаны в лемме 2 о коммутирующих перестановках. Разберем эти три случая.

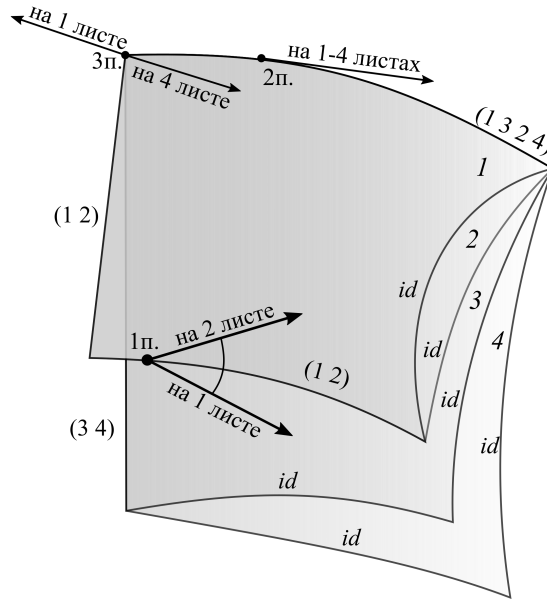


Рис. 12: На рисунке приведены примеры точек на $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, которые будут отождествлены. Примерам приписаны номера пунктов отношения эквивалентности.

1. *Случай отражения от дуги.* Когда материальная точка попадает на корешок (одномерную клетку) под углом, то угол падения равен углу отражения (см. рис. 12). Иными словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$;
- $\Sigma[e^1](\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$ (заметим, что номера листов могут совпадать);
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 — внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, причем ни один из векторов не направлен по касательной к корешку e^1 ;
- $|v_1| = |v_2|$ и $v_1 - v_2$ ортогонален касательной к корешку e^1 .

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

2. *Случай касания кривой границы.* Касание материальной точки выпуклой границы дает движение вдоль дуги квадрики, при касании невыпуклой — движение не определено (см. опр. 9 биллиардной книжки и замечание 7 о невыпуклых склейках). Однако, на фазовом пространстве эти два случая не отличаются. Дело в

том, что такое положение материальной точки задает однозначно состояние динамической системы: материальная точка находится на некотором корешке и идет по направлению касательной. Это состояние должно отвечать точке на фазовом пространстве. Но если в невыпуклом случае интегральная кривая достигает этой точки на фазовом пространстве за конечное время, то далее она однозначно не определяется. Поэтому на траекториях мы эту точку выкалываем, а на фазовом пространстве — нет.

Напомним (см. доказательство леммы 2 о коммутирующих перестановках), что если траектория касается дуги квадрики, то она принадлежит сразу всем листам, граничащим с этой дугой. Иными словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in \bar{e}^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$;
- $\Sigma[e^1](\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- $v_1 = v_2$;
- векторы v_1 и v_2 направлены по касательной к корешку e^1 .

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

3. Случай угловой точки.

Случай угловой точки или случай попадания в угол на нульмерную клетку e^0 был описан в лемме 2 о коммутирующих перестановках. Итак, рассмотрим случай, изображенный на рис. 11. Пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = e^0$ для некоторой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$;
- $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- вектор v_2 направлен внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, и $v_1 = -v_2$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

Профакторизовав по описанному выше отношению эквивалентности, получаем фазовое пространство M^4 . Траектории в билиардной книжке соответствуют некоторой кривой в M^4 . Также заметим, что на фазовом пространстве M^4 естественно определяется топология, полученная из топологии на клеточном комплексе и плоскости, отвечающей пространству векторов скорости.

Замечание 12 (явный вид первых интегралов). Теперь, определив фазовое пространство M^4 , можем выписать явные формулы первых интегралов билиардной книжки класса **b**. Итак, пусть $m \in M^4$. Берем любой элемент m' из класса эквивалентности точки m , описанного выше. Это — точка из $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Рассмотрим композицию $\rho \circ \pi : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, где ρ — каноническое отображение билиардного комплекса в плоскость (см. опр. 8), а π — проекция расслоения (см. опр. 13). Воспользуясь этим отображением, можем связать с $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ декартовы координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. А значит, точке m' можно сопоставить декартовы координаты (x_1, x_2, v_1, v_2) в пространстве $\mathbb{R}^4$. Тогда первые интегралы имеют вид:

$$H = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \text{ — полная энергия;} \quad (2.4)$$

$$\Lambda = \frac{-(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a}{v_1^2 + v_2^2} \text{ — параметр каустики.} \quad (2.5)$$

Значение обоих первых интегралов не зависит от выбора представителя m' . Этот факт проверяется явной подстановкой в них точек, которые мы отождествили. Это означает, первые интегралы корректно определены на всем фазовом пространстве M^4 .

Определение 14. *Изоэнергетическим многообразием* называется топологическое пространство $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = h\}$ с топологией, индуцированной топологией на M^4 , где $h > 0$ — фиксированное число, а $H(m)$ — гамильтониан (в случае бильярдных книжек он задается уравнением (2.4)).

Обратим внимание, что изначально не предполагается, что топологическое пространство Q^3 и фазовое пространство M^4 бильярдной книжки являются многообразиями. Поэтому важны следующая теорема и следствие из нее, доказательство которых можно найти в статье И. С. Харчевой [38].

Теорема 1 (Харчева). *Для любой бильярдной книжки изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$ для фиксированного $h > 0$, действительно является топологическим кусочно-гладким трехмерным многообразием.*

Следствие 2. *Для любой бильярдной книжки фазовое пространство M^4 является четырехмерным топологическим кусочно-гладким многообразием, гомеоморфным декартову произведению изоэнергетического многообразия Q^3 и интервала.*

Таким образом, в бильярдной книжке на фазовом пространстве M^4 определены непрерывные функции H и Λ , являющиеся гладкими функциями в точках гладкости многообразия M^4 . Эти функции являются первыми интегралами (см. подробнее следующую главу).

Замечание 13. Заметим, что на изоэнергетическом многообразии Q^3 первый интеграл Λ является квадратичным, поскольку $v_1^2 + v_2^2 = \text{const}$. Таким образом, замечательной особенностью бильярдных книжек является то, что на них имеется простой квадратичный и наглядный (отвечающий параметру каустики) первый интеграл. При этом бильярдные книжки эквивалентны другим динамическим системам с более сложными первыми интегралами, например, случаям динамики твердого тела (см. [33]) и интегрируемым геодезическим потокам на ориентируемых двумерных поверхностях (см. [34]). Таким образом, бильярдные книжки позволяют понижать степень дополнительного интеграла, поскольку во многих системах дополнительные интегралы имеют степень больше двух. Эквивалентность таких систем была установлена при помощи инвариантов Фоменко-Цишанга, о которых пойдет речь в следующей главе.

Замечание 14. Расширим определение 13 проекции расслоения. Нетрудно заметить, что в описанном выше отношении эквивалентности мы отождествляли только точки, у которых $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2)$. Это означает, что проекцию расслоения можно определить не на произведении $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, а на фазовом пространстве M^4 , то есть далее считаем, что $\pi : M^4 \rightarrow X$.

3 Атом. Грубая молекула.

Будем изучать топологию изоэнергетического многообразия Q^3 , расслаивая его на уровни интеграла Λ , отвечающего параметру каустики. Для этого нам понадобятся элементы теории инвариантов Фоменко-Цишанга, а именно: понятия атомов и грубых молекул (см. работы А. Т. Фоменко [12, 13]).

Рассмотрим гладкое многообразие X^2 и на нем гладкую функцию $f : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 15. Точка $x \in X^2$ называется *критической* для функции f , если все частные производные равны нулю в этой точке. В противном случае точка называется *регулярной*.

Определение 16. Критическая точка $x \in X^2$ называется *невыврожденной* для функции f , если определитель матрицы вторых частных производных отличен от нуля.

Определение 17. Уровень $(f = c)$ называется критическим, если на этом уровне есть хотя бы одна критическая точка, в противном случае он называется *регулярным*.

Определение 18. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Далее, пусть f — функция Морса.

Определение 19. Введем на многообразии X^2 следующее отношение эквивалентности: на каждом уровне функции f точки x_1 и $x_2 \in X^2$ считаем эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности. Профакторизуем многообразие X^2 по этому отношению эквивалентности. Получим граф (см. рис. 13), который называется *графом Рибо* для функции f на многообразии X^2 .

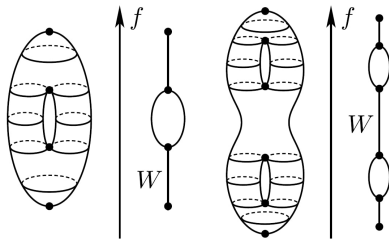


Рис. 13: Граф Рибо для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

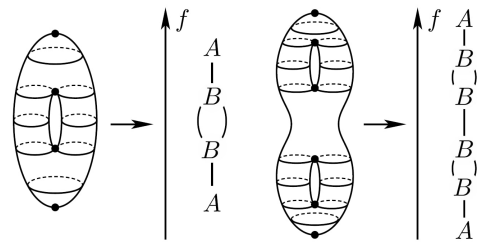


Рис. 14: Грубая молекула для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

Определение 20. Рассмотрим достаточно малую ε — окрестность некоторой точки графа Рибо, принадлежащей связной компоненте слоя, где есть критическая точка. Ее прообраз с точностью до послыйного диффеоморфизма, сохраняющего ориентацию критических окружностей и многообразия X^2 , называется *2-атомом*.

Замечание 15. Все 2-атомы сложности не больше трех перечислены и закодированы общепринятыми обозначениями в книге [15] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко. В нашей работе мы будем пользоваться обозначениями этой книги.

Замечание 16. Все вершины графа Рибо лежат на критических слоях. Кроме того, множество критических значений имеет меру нуль, а в прообразе всех регулярных значений лежит окружность.

Определение 21. Граф Рибо вместе с указанными атомами в соответствующих точках на нем называется *грубой молекулой* для функции f на многообразии X^2 (см. рис. 14).

Замечание 17 (об ориентации ребер на грубой молекуле). Заметим, что грубая молекула, отвечающая некоторой функции f , обычно рассматривается как неориентированный граф, но, вообще говоря, при ее построении можно ввести ориентацию так, что ребра графа будут направлены по возрастанию функции f .

Замечание 18 (о круговых молекулах). Обратим внимание, что существуют также круговые грубые молекулы. Это такие грубые молекулы, в которых при их рассмотрении как ориентированных графов (см. замечание 17) встречаются циклы. Они возникают в случае, когда образом интеграла является не отрезок или действительная прямая $\mathbb{R}$, а, например, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

В настоящей статье мы такие случаи не рассматриваем. Кроме того, эти случаи невозможно моделировать биллиардами, подобными биллиардным книжкам. Это происходит, потому что интеграл Λ , отвечающий параметру каустики, принимает значения на отрезке $[\lambda', a]$, где λ' — минимальный параметр эллипса, являющегося дугой границы. Но вместо этого, интеграл обладает другими “хорошими” свойствами, описанными в замечании 13.

Таким образом, для любой грубой молекулы W , рассматриваемой в этой статье, на графе нет циклов, а значит, мы можем определить топологический порядок на вершинах, в том числе определить такую непрерывную функцию $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, что если атомы P и Q соединены ребром в направлении от атома P к атому Q , то $f(P) < f(Q)$.

Теперь перейдем к четырехмерным фазовым многообразиям и определим аналогичным образом граф Роба, 3-атомы и грубые молекулы в этом случае. Рассмотрим интегрируемую по Лиувиллю систему с двумя степенями свободы.

Пусть дана динамическая система $g^t : \mathbb{R} \times M^4 \rightarrow M^4$ на гладком компактном многообразии M^4 (фазовом пространстве). Обозначим $v = \frac{\partial g^t}{\partial t}$.

Определение 22. Функция f является первым интегралом динамической системы g^t , если производная Ли $\mathcal{L}_v f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ равна нулю.

Определение 23. Динамическая система g^t называется *гамильтоновой*, если на фазовом пространстве M^4 можно задать симплектическую структуру ω (невырожденную замкнутую 2-форму) и выбрать гладкую функцию H так, что динамическая система запишется в виде $v^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$. Функция H называется *гамильтонианом*.

Из определения следует, что гамильтониан является первым интегралом. Допустим, что у гамильтоновой системы есть дополнительный первый интеграл Λ , функционально независимый с гамильтонианом H . Предположим также, что векторные поля v^i и $(\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}$ полны, то есть естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение 24. Если для первых интегралов H и Λ выполнено равенство $\{H, \Lambda\} := \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j} = 0$, то говорят, что эти интегралы *находятся в инволюции*, а система является *вполне интегрируемой по Лиувиллю*.

Определение 25. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю системе, называется разбиение многообразия M^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H и Λ .

Для такой системы рассмотрим изоэнергетическое многообразие $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = c\}$, где c — некоторая фиксированная константа. Вторым первым интегралом Λ можно теперь рассмотреть как функцию на многообразии Q^3 .

Граф Роба, 3-атомы и грубая молекула для гладкой функции $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ определяются аналогично двумерному случаю.

Согласно теореме Лиувилля, которую можно, например, найти в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [15] (теорема 1.2), регулярный уровень функции Λ состоит из двумерных торов, называемых *торами Лиувилля*.

Определение 26. Две системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм баз слоений Лиувилля, который может быть локально (в окрестности каждой точки базы) поднят до послойного гомеоморфизма.

Теорема 2 (А.Т. Фоменко). *Две интегрируемые гамильтоновы системы грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их грубые молекулы совпадают.*

Замечание 19. 3-атомы и грубые молекулы являются частью полного инварианта вполне интегрируемых гамильтоновых систем на четырехмерном многообразии — меченой молекулы (см. [14, 15]).

Замечание 20 (гамильтоновость билиардных книжек в точках гладкости). В случае билиардных книжек фазовое пространство M^4 является кусочно-гладким многообразием. В точках гладкости явным вычислением можно проверить, что динамическая система билиардной книжки является гамильтоновой со стандартной симплектической структурой

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а гамильтониан H и дополнительный интеграл Λ (см. формулы в замечании 12) функционально независимы и находятся в инволюции.

Но поскольку существуют точки на фазовом пространстве M^4 , в которых гладкость нарушается, то мы не можем пользоваться 3-атомами и грубыми молекулами, определенными лишь в гладком случае. Поэтому сформулируем обобщения 3-атомов и грубых молекул.

Пусть дана динамическая система $g^t : \mathbb{R} \times M^4 \longrightarrow M^4$ на кусочно-гладком компактном многообразии M^4 (фазовом пространстве), у которой есть два первых интеграла H и Λ (здесь под первым интегралом подразумевается непрерывная функция, которая сохраняется вдоль любой траектории).

Замечание 21. Заметим, что граф Роба можно определить так же, как и в определении 21, для топологического многообразия и, в частности, для кусочно-гладкого.

Определение 27. Рассмотрим прообраз точки ξ на графе Роба, построенного для первого интеграла $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ на изоэнергетическом кусочно-гладком многообразии $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = c\}$. Пусть этот прообраз не является регулярным, то есть не гомеоморфен кусочно-гладкому двумерному тору Лиувилля. Прообраз ε — окрестности этой точки ξ , рассматриваемый с точностью до послойного гомеоморфизма, называется *3-атомом*.

Определение 28. Граф Роба с указанными 3-атомами в соответствующих вершинах называется *грубой молекулой* для функции Λ на изоэнергетическом кусочно-гладком многообразии Q^3 .

Замечание 22. Заметим, что сформулированные определения действительно являются обобщениями. Иными словами, если динамическая система является гладкой и вполне интегрируемой по Лиувиллю, то эти определения 3-атомов и грубых молекул совпадут с классическими.

Кроме того, в негладком случае нельзя пользоваться теоремой Лиувилля, доказательство которой требует гладкость фазового пространства. Поэтому в случае билиардных книжек (и любых других билиардов) нет гарантии, что регулярные слои будут состоять из торов. Например, в случае билиардов, области которых содержат тупые углы, на регулярных слоях вместо торов возникают сферы с несколькими ручками и выколотыми точками (см. работы В.И. Драгович, М. Раднович [39], В.А. Москвина [40]). Поэтому топологию каждого слоя интеграла Λ мы будем определять методом

В. В. Фокичевой (В. В. Ведюшкиной), описанным в работе [30], а именно для каждого уровня мы будем явно находить, чему он гомеоморфен. Оказывается, построенные для бильярдных книжек грубые молекулы, в основном, имеют обычный вид: в прообразе ребер графа грубой молекулы — двумерные торы, в прообразе вершин — 3-атомы, подчиняющиеся классификации из книги [15] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, о которой пойдет речь в следующем параграфе.

4 Структура атомов.

В этом параграфе мы кратко опишем нужные нам элементы теории атомов и молекул, изложенной в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [15].

2-атомы описывают перестройку одного набора окружностей в другой, 3-атомы описывают перестройку двумерных торов.

2 и 3-атомы бывают двух видов: атомы A , отвечающие минимуму или максимуму интеграла Λ , и седловые атомы, отвечающие промежуточным (седловым) критическим значениям интеграла Λ .

Минимаксные 2-атомы A послойно гомеоморфны двумерному диску D , расслоенному на окружности и точку. Минимаксные 3-атомы A послойно гомеоморфны полноторию $D \times S^1$, расслоенному на торы и окружность. Седловые 2 и 3-атомы устроены сложнее. Для их описания нам понадобятся следующие определения.

Определение 29. *Крестом* называется прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой достаточно малой δ -окрестности точки $(0, 0)$ вместе со структурой слоения, необходимой для того, чтобы говорить о послойном гомеоморфизме (см. рис. 15). Здесь уровень $x^2 - y^2 = 0$ — критический.

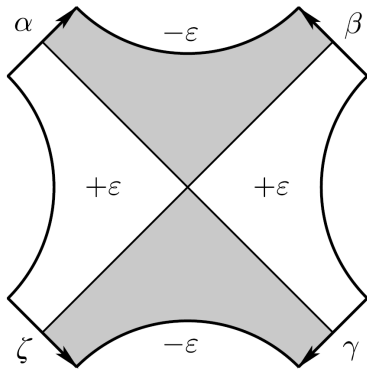


Рис. 15: Крест. Слои $x^2 - y^2 \in (-\varepsilon, 0)$ закрашены серым, слои $x^2 - y^2 \in (0, +\varepsilon)$ не закрашены.

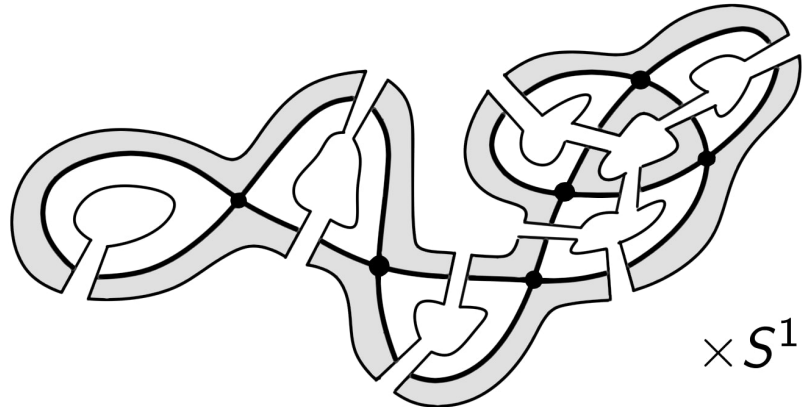
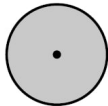
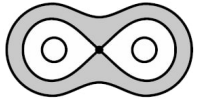
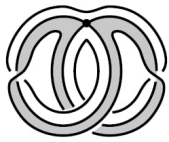


Рис. 16: Иллюстрация теоремы 3 Фоменко.

Определение 30. *Ребро креста* — это пересечение креста с границей δ -окрестности точки $(0, 0)$, то есть $(|x^2 - y^2| < \varepsilon) \cap (x^2 + y^2 = \delta)$.

К ребрам креста на рис. 15 приписаны стрелки и буквы $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$.

Теорема 3 (Фоменко). *Любой седловой 2-атом P можно представить как склейку из $k \in \mathbb{N}$ крестов вдоль их ребер так, чтобы каждый уровень $(x^2 - y^2 = c)$, $c \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ на одном кресте склеивался с таким же уровнем на другом кресте (см. рис. 17). Число k называется сложностью 2-атома P (см. рис. 16).*

№	Атом	Код
Сложность 1 Ориентируемые		
1		$A—$
2		$>B—$
Неориентируемый		
$\tilde{1}$		$—\tilde{B}—$

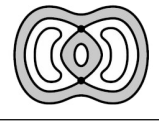
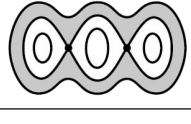
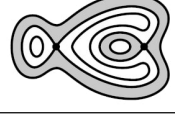
Сложность 2 Ориентируемые		
1		$—C_1—$
2		$>C_2<$
3		$—D_1\leq$
4		$>D_2<$

Рис. 17: Таблица некоторых 2-атомов. Тут можно увидеть, каким образом 2-атомы склеиваются из крестов.

Замечание 23. 3-атомы бывают, как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Если на каком-то критическом уровне возникает неориентируемый атом, то изоэнергетическое 3-многообразие в целом получается неориентируемым. В теории интегрируемых гамильтоновых систем встречаются только ориентируемые многообразия, поэтому вопрос о представлении неориентируемых 3-атомов мы здесь обсуждать не будем.

Согласно теореме Фоменко (см. теорему 3.3 в [15]), любой ориентируемый 3-атом невырожденной системы является расслоением Зейферта над 2-атомом, причем особые слои этого расслоения могут иметь только тип $(2,1)$. Иными словами, любой ориентируемый седловой 3-атом может быть получен одним из двух способов:

1. Прямым произведением некоторого ориентируемого седлового 2-атома на окружность S^1 .
2. Второй способ устроен несколько сложнее. Здесь мы опишем *атом со звездочками*. Пусть дан ориентируемый седловой 2-атом $\hat{P}$. Для определенности фиксируем на нем функцию Морса $\hat{f}$, которая задает слоение. Предположим, что на 2-атоме задано гладкое отображение $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, обладающее следующими свойствами:

- (a) $\tau^2 = id$ (инволюция),
- (b) τ сохраняет уровни, т.е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$,
- (c) τ сохраняет ориентацию,
- (d) некоторое конечное число критических точек является неподвижными точками инволюции τ .

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $\hat{P} \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$ для каждого $x \in \hat{P}$. В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие U с краем. Функция $\hat{f}$ естественным образом продолжается на U , поскольку $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$, и ее поверхности уровня задают структуру слоения на U с единственным особым слоем. Многообразие U со структурой слоения, заданной функцией f , является *3-атомом со звездочками*.

Если профакторизовать $\hat{P}$ по инволюции τ , получим другой 2-атом P . Выделим на нем звездочками точки на критической окружности, которые сохраняются под действием инволюции τ . Полученный 2-атом P с выделенными звездочками называется *2-атомом со звездочками*, а 2-атом $\hat{P}$ называется *дублем 2-атома P* . Кроме того, 3-атом $\hat{P} \times S^1$ называется *дублем 3-атома U* .

Иногда после факторизации получается кольцо со звездочками, расслоенное на окружности. В этом случае считаем, что у нас атом A со звездочками.

Таким образом, все ориентируемые 3-атомы можно описать обычными ориентируемыми 2-атомами и ориентируемыми 2-атомами, на которых стоит конечное число звездочек на критическом уровне.

Отметим, что дубль $\hat{P}$ является разветвленным двулиственным накрытием над 2-атомом P , причем точками ветвления являются как раз звездочки атома P .

Замечание 24. Обратим внимание, что дублей у одного атома со звездочкой может быть несколько, и все они задают один и тот же 3-атом (см. лемму 3.3 в [15]). Поэтому многообразие U однозначно определяется атомом со звездочками P .

Пример. На рис. 18 приведены примеры 3-атомов. Атом A минимума и максимума функции описывает сжатие торов на окружность. Атом B является прямым произведением 2-атома B на окружность и описывает перестройку одного тора в два. Атом A^* устроен несколько сложнее атома B : нужно удалить из полнотория лишь одно полноторие, но обходящее два раза вдоль оси. Особый слой получается протаскиванием вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей провернуться на угол π за один оборот. При прохождении через особый уровень этого 3-атома один тор перестраивается в один тор.

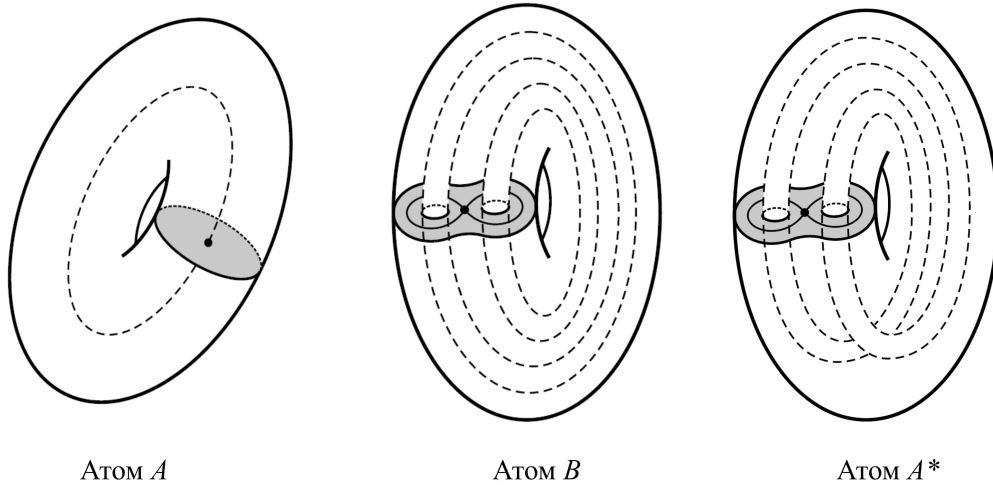


Рис. 18: Примеры 3-атомов.

Замечание 25 (о возможных дублях двумерных торов). Выделим кольцо на регулярном уровне 2-атома $\hat{P}$, являющегося дублем для 2-атома P при инволюции τ . Под действием инволюции τ это кольцо может перейти в другое кольцо или в себя же. Значит, выбранной окружности на 2-атоме P со звездочками может соответствовать 1 или 2 тора на дубле $\hat{P}$. В то же время выбранному тору на 3-атоме со звездочками, соответствующему 2-атому P , может отвечать 1 или 2 тора на дубле $\hat{P} \times S^1$. То есть дублем для окружности (тора) может быть одна или две окружности (тора). Например, если рассмотреть дубль B для 2-атома A^* с инволюцией, переводящей одну половину “восьмерки” в другую, то внешней окружности 2-атома A^* на рис. 19 будет соответствовать одна окружность на дубле, а внутренней — две.

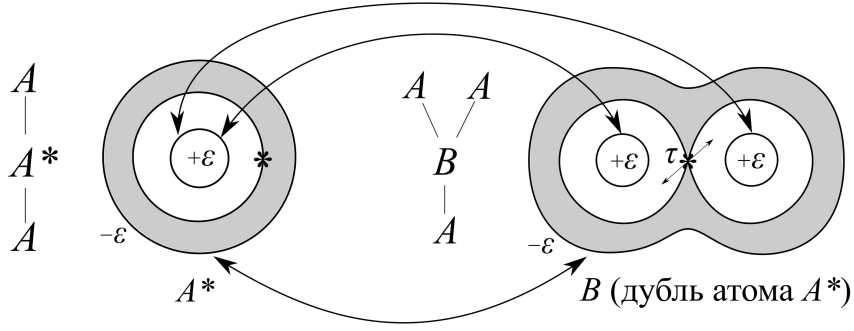


Рис. 19: Дубль для торов в окрестности 2-атома A^* .

Замечание 26 (о явном конструировании дублей для атомов). Пусть дан 2-атом P сложности k с l звездочками. Сконструируем для него дубль и укажем на нем инволюцию с неподвижными точками, находящимися на месте звездочек. Фиксируем некоторую звездочку. Разрежем 2-атом P по любому из колец до некоторой звездочки (см. пример на рис. 20). Прделаем эту операцию для каждой звездочки. Берем второй такой же разрезанный 2-атом P . Определим инволюцию τ : она отображает точки из разрезанного 2-атома P в соответствующие точки на его копии. Склеиваем разрезанный 2-атом P с его копией по разрезанным ребрам при звездочках так, чтобы в окрестности каждой звездочки получился крест, как на рис. 15. Получили дубль. А именно седловой 2-атом $\hat{P}$ без звездочек сложности $2k+l$. Заметим, что если 2-атом $\hat{P}$ профакторизовать по инволюции τ , то получим обратно 2-атом P .

Таким образом, этим способом мы можем получить несколько дублей в зависимости от того, по какому из колец разрезали: ниже критического уровня или выше. И, как уже упоминалось ранее, 3-атом не зависит от того, на основе какого дубля он будет построен. Заметим также, что это не все способы получить дубли.

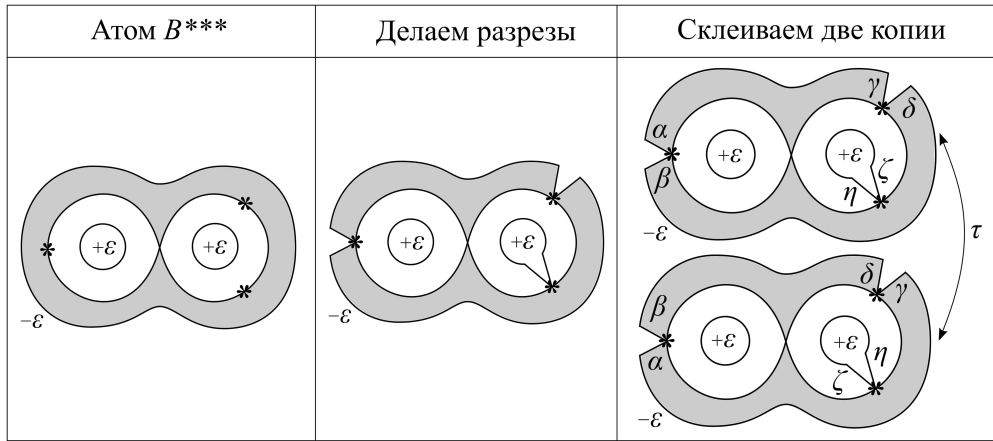


Рис. 20: Пример конструирования дубля для 2-атома B^{***} . $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta$ задают склейку двух разрезанных копий 2-атома B^{***} в дубль.

Замечание 27. Также заметим, что для дальнейшего моделирования грубых молекул нам важно, какие кольца у фиксированного 2-атома (3-атома) верхние (лежат на уровне выше критического), а какие нижние (лежат на уровне ниже критического). Иными словами, каждый из 2-атомов (3-атомов) можно отразить относительно критического уровня и получить тот же атом, но перестраивающий окрестности (торы) в обратном порядке (см. пример на рис. 21). Нам важно различать такие атомы.

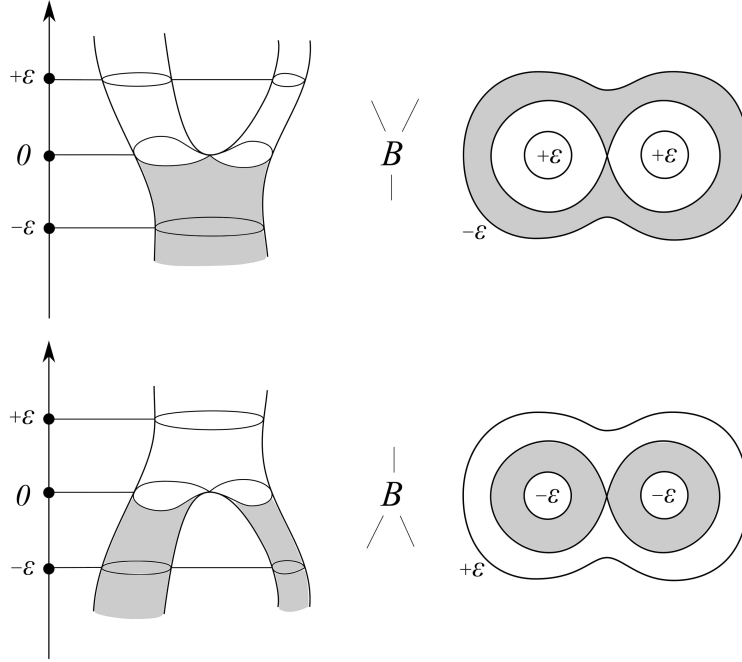


Рис. 21: Пример двух вариантов перестроек 2-атома B . На одном рисунке 2-атом B перестраивает один тор в два. На другом — тот же 2-атом B , но отраженный относительно критического уровня. Теперь он перестраивает два тора в один.

5 Моделирование 3-атомов билиардными книжками класса $\mathbf{a}$.

Ранее в работе [36] была доказана следующая теорема.

Теорема 4 (Ведюшкина-Харчева). *Гипотеза Фоменко $\mathbf{A}$ верна, а именно, для любого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится билиардная книжка класса $\mathbf{a}$, такая что в ее изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Ливилля прообраза окрестности особого значения интеграла Λ , отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

Поскольку алгоритм моделирования 3-атомов из теоремы выше понадобится для моделирования грубых молекул, воспроизведем его в этой главе. Алгоритм моделирования атомов без звездочек и со звездочками отличаются. Изложим оба алгоритма.

Алгоритм 1 (моделирования 3-атомов без звездочек). Пусть дан произвольный ориентируемый седловой 3-атом U без звездочек. Тогда существует ориентируемый седловой 2-атом P , такой что $U = P \times S^1$ (см. главу 4 “Структура атомов”). Чтобы построить билиардную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса $\mathbf{a}$, у которой на уровне $\Lambda = b$ возникает 3-атом U , нужно выполнить следующие действия.

1. Погрузим 2-атом P можно в плоскость с сохранением ориентации (это можно сделать согласно теореме 2.9. в [15]). Зададим направление на критическом уровне атома так, чтобы уровни интеграла, которые меньше критического, оставались слева. Распространим по непрерывности это направление на близкие регулярные уровни интеграла.

Заметим, что если поменять направление, то в получившейся билиардной книжке циклы, приписанные одномерным клеткам, будут идти в противоположном порядке, то есть перестановки заменятся на обратные им.

2. Согласно теореме 3 атом P представляется в виде склейки из k крестов, где $k \in \mathbb{N}$ — сложность атома. Напомним, что крестом называется прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ вместе со структурой слоения (см. рис. 15). Разделим каждый крест пополам по положительному уровню, как показано на рис. 22. Кресты разбились на верхнюю и нижнюю половины. Занумеруем полукресты от 1 до $2k$.

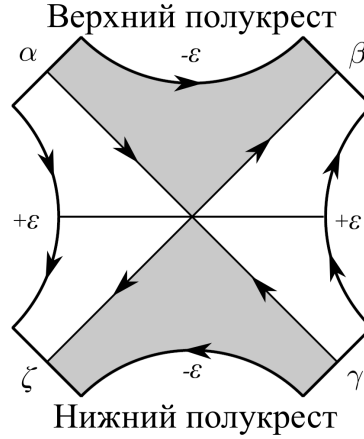


Рис. 22: Разделение креста на полукресты по положительному уровню. $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ — ребра креста.

3. Биллиардная книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса $\mathbf{a}$ будет состоять из $2k$ листов типа A'_0 (см. рис. 10). Сопоставим каждой половине креста лист биллиардной книжки. Введем нумерацию на листах в соответствии с нумерацией полукрестов. Направление на полукрестах, заданное на шаге 1 указывает направление траектории материальной точки в окрестности особого слоя на соответствующих листах. На основе этого рассуждения будем писать перестановки.
4. Согласно следствию 1 леммы 3 для построения биллиардной книжки класса $\mathbf{a}$ достаточно указать три перестановки $\sigma[0], \sigma[b]$ и $\sigma[a]$ на квадрах, отвечающих верхней эллиптической границе, нижней границе (фокальной прямой) и левой границе (вертикальной прямой) биллиардных областей соответственно. В случае атомов без звездочек $\sigma[a] = id$. Осталось указать две перестановки. Перестановка $\sigma[b]$ нижней границы области отвечает склейке полукрестов в кресты, перестановка $\sigma[0]$ верхней границы области отвечает склейке крестов в атом. Более детально опишем эти перестановки ниже.
5. Построим перестановку $\sigma[b]$. Если полукресты с номерами i и j склеены в крест, то указываем $\sigma[b](i) = j$ и $\sigma[b](j) = i$. В итоге получим, что перестановка $\sigma[b]$ раскладывается в произведение независимых циклов длины 2, где каждый цикл содержит номера двух полукрестов, склеивающихся в крест.
6. Построим перестановку $\sigma[0]$. Рассмотрим полукрест с номером i . На шаге 1 этого алгоритма мы задали направление на уровнях интеграла. Смотрим на исходящее направление i -ого полукреста. Ему соответствует некоторое ребро. Это ребро склеено с другим ребром, которому соответствует входящее направление некоторого j -ого полукреста. В том числе i -ый полукрест может склеиться сам с собой. Положим $\sigma[0](i) = j$. Прделавав такую операцию для всех половин крестов, получим перестановку $\sigma[0]$ из $2k$ элементов. Эта перестановка однозначно определяется атомом с фиксированной нумерацией полукрестов.

В итоге, следствие 1 о конструировании бильярдной книжки класса **a** по трем перестановкам дает бильярдную книжку, состоящую из элементарных областей типа A'_0 , которая строится по трем перестановкам $\sigma[0], \sigma[b], \sigma[a]$ на квадраках. Получившаяся бильярдная книжка является результатом алгоритма 1.

Алгоритм 2 (моделирования 3-атомов со звездочками). Пусть дан 3-атом U сложности $k + l$, где k — число крестов, из которых он склеен, а l — число звездочек. 3-атому U соответствует ориентируемый 2-атом P сложности k (сложность 0 в данном случае означает, что атом — это кольцо, расслоенное на окружности), на котором на критическом уровне стоит l звездочек (см. главу 4 “Структура атомов”).

- Сконструируем для 2-атома P дубль $\hat{P}$ с инволюцией $\tau : \hat{P} \longrightarrow \hat{P}$ согласно замечанию 26 о явном конструировании дублей для атомов.
- Воспользуемся предыдущим алгоритмом 1 и построим бильярдную книжку $\mathcal{B}$ класса **a** из $4k + 2l$ листов для седлового 2-атома $\hat{P}$, умноженного на окружность.
- В полученной бильярдной книжке изменим только перестановку $\sigma[b]$, отвечающую левой границе листов. Раньше она была тождественной, теперь она описывает инволюцию τ . А именно, если инволюция τ переводит i -ую половину креста в j -ую, то задаем $\sigma[b](i) = j$. Полученная перестановка $\sigma[b]$ также будет инволюцией.

Таким образом, мы получили бильярдную книжку класса **a**. Особенностью бильярдных книжек, отвечающих атомам со звездочками, является наличие склейки на левой границе, являющейся инволюцией.

Замечание 28. Заметим, что в алгоритмах 1 и 2 перестановки строились, основываясь не на нумерации полукрестов, а на склейке полукрестов в атом и инволюции τ . Перестановка $\sigma[b]$ на нижней границе листов отвечает склейке полукрестов в кресты, $\sigma[0]$ на верхней границе — крестов в атом, $\sigma[a]$ на левой границе — инволюции τ на дубле атомов со звездочками. Нумерация полукрестов вводилась, чтобы упростить обозначения. Таким образом, получившаяся бильярдная книжка не зависит от нумерации полукрестов. В случае 3-атомов без звездочек бильярдная книжка строится однозначно. В случае 3-атомов со звездочками строится однозначно, только если зафиксировать дубль.

Замечание 29. (о методе) Опишем метод, с помощью которого мы будем изучать слои на бильярдных книжках класса **b**, введенный В. В. Ведюшкиной (см., например, статьи [30, 31, 32]), и на котором будут основываться представленные в работе результаты. К этому методу мы будем многократно возвращаться.

Напомним, что на фазовых пространствах M^4 бильярдных книжек класса **b** определены проекции расслоения $\pi : M^4 \longrightarrow X$ (см. замечание 14). Можно посмотреть, в какие точки на бильярдном комплексе X перейдут слои на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Образ слоя при такой проекции называется *областью возможного движения* и показывает, по какой части бильярдной книжки может идти траектория, принадлежащая этому слою. Заметим, что каждой точке на бильярдном комплексе X соответствует не более 4-х точек на выделенном уровне интеграла Λ на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Это верно, поскольку точки на изоэнергетическом многообразии описывают состояние системы, которое идентифицируется положением на листе бильярдной книжки и вектором, указывающим направление движения материальной точки (см. главу 2). Условие, что точка должна принадлежать уровню интеграла Λ , отвечает направлениям векторов, которые либо касаются определенной квадраки, либо идут от или к одному из фокусов. В итоге, если зафиксировать положение материальной точки

на билиардной книжке класса **b**, получается не более 4-х возможных векторов. Будем изучать уровни интеграла Λ , рассматривая положение материальной точки на билиардной книжке и различные направления вектора скорости для этого положения. Эти векторы будут некоторым образом склеиваться на границе листов и образовывать двумерные слои. Таким образом мы можем описывать топологию любого слоя билиардной книжки.

Фиксируем билиардную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ класса **b**. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ — параметры m эллипсов, являющихся нижними дугами листов этой билиардной книжки. Пусть также дано некоторое число λ такое, что $0 < \lambda < a$, $\lambda \neq \lambda_i \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Определение 31. *Перестановкой уровня λ называется композиция всех нетождественных перестановок $\sigma[\lambda_i]$ на квадрах таких, что $\lambda_i < \lambda$ (композицию можно брать в произвольном порядке), то есть $\Pi[\lambda] := \prod_{\lambda_i < \lambda} \sigma[\lambda_i]$.*

Лемма 4. *В билиардной книжке $\mathcal{B}$ класса **b** уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным.*

Если перестановка $\sigma[a]$, соответствующая левой границе листов, тождественна, то существует взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ и независимыми циклами в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов.

Рассмотрим тор, который соответствует произвольному независимому циклу γ композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$. Этому тору соответствуют некоторые траектории на билиардной книжке $\mathcal{B}$. Рассмотрим листы, на которых эти траектории идут вниз (к невыпуклой дуге эллипса). Тогда номера этих листов составляют орбиту независимого цикла γ .

Доказательство. Нижние дуги листов имеют параметры $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$. Параметр λ не совпадает ни с одним параметром λ_i . Тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ верно $\lambda_1 < \dots < \lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_m$. То есть k квадрик с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ отвечают эллипсам, большим эллипса с параметром λ . Это означает, что дуги этих эллипсов, являющиеся нижней границей некоторых листов, находятся выше эллипса с параметром λ , которого касается траектория.

Уровень $\Lambda = \lambda$ соответствует траекториям на листах, которые касаются эллипса с параметром λ . Значит, на листах, у которых нижние дуги с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ происходит отражение относительно нижней границы, на листах, у которых нижние дуги с параметрами $\lambda_{k+1} < \dots < \lambda_m$ траектории не доходят до нижней границы и касаются эллипса с параметром λ . Поэтому на нижней границе мы переходим только по перестановкам, которые приписаны дугам квадра с параметрами $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то есть по перестановкам $\sigma[\lambda_1], \sigma[\lambda_2], \dots, \sigma[\lambda_k]$. Заметим, что для каждого $i = 1, \dots, m$ перестановка $\sigma[\lambda_i]$ переводит только листы с параметром квадра нижней границы листа, равным λ_i . Поэтому перестановки $\sigma[\lambda_i]$ не пересекаются. Таким образом, материальная точка при движении вниз, отражается от нижней границы листа или касается эллипса с параметром λ , переходя с листа на лист по композиции $\sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] \circ \dots \circ \sigma[\lambda_k]$ (композицию можно брать в произвольном порядке), которая равна перестановке $\Pi[\lambda]$ уровня λ .

Сверху все листы имеют границу с параметром квадра, равным 0, поскольку мы рассматриваем билиардную книжку класса **b**. Значит, и на уровне $\Lambda = \lambda$ материальная точка отражается от верхней границы, переходя на следующий лист по перестановке $\sigma[0]$. Поскольку это билиардная книжка класса **b**, то справа приписана тождественная перестановка $\sigma[\tilde{\lambda}] = id$. Сначала предположим, что слева перестановка $\sigma[a]$ тоже тождественна. В этом случае, траектории, отражаясь от левой и правой границы,

остаются на том же листе. Поэтому можно не обращать внимание на отражение слева и справа и классифицировать все траектории следующим образом.

Рассмотрим траекторию, которая идет вниз по i -му листу. Внизу эта траектория после отражения или касания перейдет по перестановке $\Pi[\lambda]$ и пойдет по листу с номером $\Pi[\lambda](i)$ вверх. Когда она дойдет до верхней границы, она отразится и перейдет на следующий лист по перестановке $\sigma[0]$, затем продолжит движение вниз на листе с номером $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda](i)$. Если подействовать еще раз композицией $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ на номер листа, получим следующий лист, на котором эта траектория идет вниз. Если продолжать применять эту перестановку, в какой-то момент мы снова вернемся на лист с номером i , то есть получим цикл, который соответствует движению этой траектории.

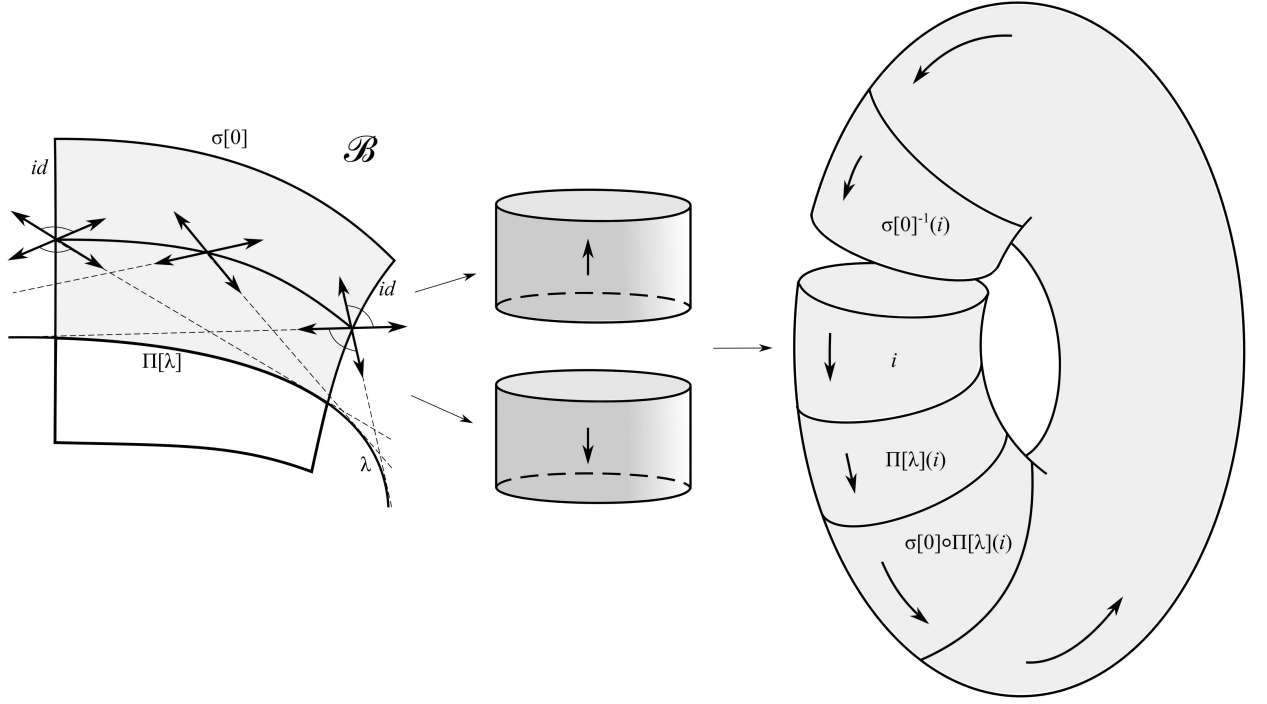


Рис. 23: Склейка точек на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$, соответствующих векторам на бильярдной книжке, в тор.

Получается, если разложить композицию $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов, то каждый из циклов будет соответствовать некоторому классу траекторий. Числа в циклах будут соответствовать номерам листов, по которым эти траектории идут вниз. Легко видеть, что мы рассмотрели все траектории, лежащие на уровне $\Lambda = \lambda$, поскольку все траектории идут либо вверх, либо вниз на каждом из листов, так как они касаются эллипса с параметром λ . Покажем, используя метод, описанный в замечании 29, что каждая из таких траекторий соответствует некоторому тору на уровне $\Lambda = \lambda$.

Рассмотрим произвольный лист на бильярдной книжке. Поскольку уровень $\Lambda = \lambda$ отвечает траекториям, которые касаются эллипса с параметром λ для каждой точки внутри листа есть 4 типа векторов: векторы, направленные влево вверх, вправо вверх, вправо вниз и влево вниз (см. рис. 23). Справа и слева из-за отражения и тождественных перестановок, векторы, направленные влево склеиваются с векторами направленными вправо. Из-за этого несвязное объединение 4-х областей возможного движения склеивается в два кольца. Итак, каждый лист соответствует двум кольцам с траекториями, направленными вверх и вниз (см. рис. 23). Эти кольца склеиваются между собой согласно перестановкам приписанным снизу и сверху листов следующим образом. Рассмотрим лист с номером i . Пусть материальная точка находится внизу области возможного движения на i -ом листе. Рассмотрим векторы, направленные вниз для этих точек. Они

склеиваются согласно закону отражения с векторами, направленными вверх на листе с номером $\Pi[\lambda](i)$. Точно также сверху векторы склеиваются по перестановке $\sigma[0]$. В итоге кольцо, отвечающее i -му листу с траекториями, направленными вниз, склеивается с кольцом $\Pi[\lambda](i)$ -го листа с траекториями, направленными вверх, которое в свою очередь склеивается с кольцом $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda](i)$ -го листа с траекториями, направленными вниз, и т.д. В какой-то момент склейка заиклится и мы получим тор (см. рис. 23). Из этих рассуждений прослеживается соответствие между этими торами, траекториями и независимыми циклами разложения перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Также заметим, что если рассмотреть достаточно малую окрестность уровня $\Lambda = \lambda$, то перестановка $\Pi[\lambda]$ не изменится, а векторы и области, по которым будет идти материальная точка, немного деформируются, но склеятся таким же образом в торы. Поэтому близкие уровни к уровню $\Lambda = \lambda$ гомеоморфны ему. Значит, уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ — регулярный.

Теперь рассмотрим случай, когда в бильярдной книжке $\mathcal{B}$ левая перестановка $\sigma[a]$ не является тождественной. В этом случае необходимо доказать только то, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ — регулярный. Для этого рассмотрим другую бильярдную книжку $\mathcal{B}'$, которая отличается от книжки $\mathcal{B}$ тем, что у нее левая перестановка на квадрике тождественная. Для нее верно, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным. Чтобы получить слой $\Lambda = \lambda$ в бильярдной книжке $\mathcal{B}$ из слоя $\Lambda = \lambda$ в книжке $\mathcal{B}'$, нужно отменить склейку на левом корешке и полученные цилиндры склеить по перестановке $\sigma[a]$ (см. детали в статье В. В. Ведюшкиной [41]). Получатся двумерные торы. Обратим внимание, что эти торы отличаются от торов в бильярдной книжке $\mathcal{B}'$. То же самое произойдет и в достаточно малой окрестности интеграла $\Lambda = \lambda$. Таким образом, получаем, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ является регулярным и в случае, когда левая перестановка $\sigma[a]$ не является тождественной. Лемма доказана. $\square$

Замечание 30. Если в формулировке леммы 4 рассмотреть композицию в обратном порядке $\Pi[\lambda] \circ \sigma[0]$, то получится аналогичный результат, за исключением того, что траектории будут идти вверх. А именно, рассмотрим тор, который соответствует произвольному независимому циклу ζ обратной композиции $\Pi[\lambda] \circ \sigma[0]$. Рассмотрим траектории на бильярдной книжке $\mathcal{B}$, которые соответствуют этому тору. Тогда номера листов, на которых эти траектории идут вверх (к выпуклой дуге эллипса), составляют орбиту независимого цикла ζ .

Следствие 3 (о грубой молекуле бильярдной книжки из теоремы 4). Пусть бильярдная книжка $\mathcal{B}$ получена в результате алгоритма теоремы 4 и моделирует 3-атом P . Тогда молекула для этой бильярдной книжки выглядит так, как показано на рис. 24. А именно, 3-атом P находится на уровне $\Lambda = b$. Допустим, он перестраивает k торов в l . Тогда снизу, на уровне $\Lambda = 0$, находится k 3-атомов A минимума, соединенных ребрами с 3-атомом P , сверху, на уровне $\Lambda = a$, — l 3-атомов A максимума, соединенных ребрами с 3-атомом P .

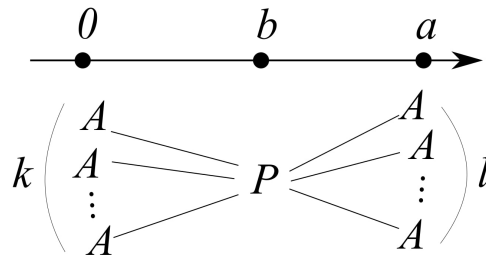


Рис. 24: Грубая молекула для бильярдной книжки, моделирующей 3-атом P по алгоритму теоремы 4.

Доказательство. Согласно теореме 4 на критическом уровне $\Lambda = b$ находится 3-атом P . Поскольку бильярдная книжка $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathbf{a}$, то из предыдущей леммы 4 следует, что на уровнях $\lambda \in (0, b) \cup (b, a)$ нет перестроек. Кроме того, уровень $\Lambda = 0$ является минимальным, при котором возможно движение в книжке $\mathcal{B}$, а уровень $\Lambda = a$ — максимальным. Таким образом, грубая молекула для книжки $\mathcal{B}$ может иметь только вид, изображенный на рис. 24. $\square$

Определение 32. Введем операцию несвязного объединения двух книжек $\mathcal{B}_1(X_1, \Sigma_1, N_1)$ и $\mathcal{B}_2(X_2, \Sigma_2, N_2)$. Перенумеруем листы на одной из книжек так, чтобы нумерации этих двух книжек не пересекались, и изменим перестановки согласно этой нумерации. Результатом операции несвязного объединения будет книжка $\mathcal{B}(X, \Sigma, N) = \mathcal{B}_1(X_1, \Sigma_1, N_1) \sqcup \mathcal{B}_2(X_2, \Sigma_2, N_2)$, которая задается следующим образом. Бильярдный комплекс X является несвязным объединением $X = X_1 \sqcup X_2$. Нумерация N на листах книжки $\mathcal{B}_1$ совпадает с нумерацией N_1 , на листах книжки $\mathcal{B}_2$ — с нумерацией N_2 . Аналогично определим функцию перестановок Σ на одномерных клетках комплекса X_1 как функцию Σ_1 , на одномерных клетках комплекса X_2 как функцию Σ_2 . Задав комплекс X и функции Σ, N , мы определили бильярдную книжку $\mathcal{B}$, являющуюся результатом операции.

Замечание 31. Пусть $\sigma_1[\lambda], \sigma_2[\lambda], \sigma[\lambda]$ при $\lambda \in [a, b]$ — семейства перестановок на квадриках для бильярдных книжек $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}$ из определения 32 соответственно. Из определения 12 перестановки на квадрике и определения 32 несвязного объединения двух книжек сразу вытекает, что $\sigma[\lambda] = \sigma_1[\lambda] \circ \sigma_2[\lambda] \quad \forall \lambda \in [a, b]$.

Предложение 1. Пусть бильярдным книжкам $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответствуют грубые молекулы W_1 и W_2 . Тогда несвязному объединению $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ соответствует грубая молекула $W_1 \sqcup W_2$.

Доказательство. Несвязное объединение $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ имеет фазовое пространство, являющееся несвязным объединением фазовых пространств книжек $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, на которых определены те же первые интегралы H и Λ , что и ранее. Значит, и грубая молекула будет также несвязным объединением $W_1 \sqcup W_2$. $\square$

6 Алгоритм моделирования любых грубых молекул бильярдными книжками класса $\mathbf{b}$.

В этой главе будет доказан следующий новый результат.

Теорема 5 (Ведюшкина-Харчева). *Гипотеза Фоменко В верна, то есть любая грубая молекула моделируется бильярдными книжками. Более точно: по любой грубой молекуле алгоритмически строится бильярдная книжка класса $\mathbf{b}$ с каноническим квадратичным интегралом Λ , отвечающим параметру каустики, такая что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

Опишем сначала алгоритм для грубой молекулы, состоящей из двух седловых атомов без звездочек и минимаксных атомов A (см. рис. 25).

Алгоритм 3 (склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру). Пусть даны два седловых атома P и Q . Хотим склеить эти два атома по выбранному ребру так, чтобы значение интеграла, которому соответствует атом Q , было меньше значения интеграла, которому соответствует атом P , то есть $\Lambda(Q) < \Lambda(P)$. Пусть атомы A минимума интеграла Λ лежат на уровне $\Lambda = 0$, максимума — на уровне $\Lambda = a$, и, кроме того, положим $\Lambda(Q) := \lambda_1$, $\Lambda(P) := \lambda_2$ и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b < a$.

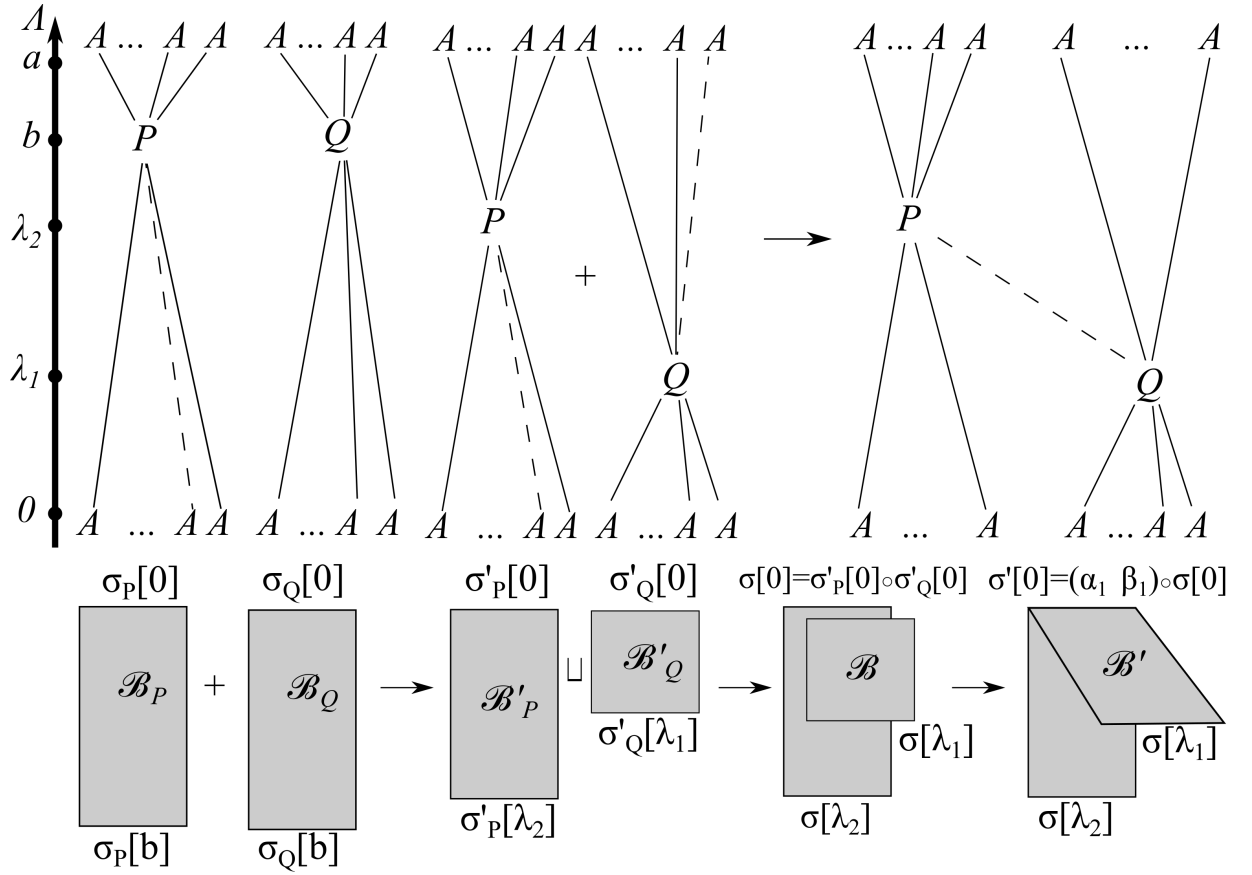


Рис. 25: Схема алгоритма 3 склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру.

1. По алгоритму 1 из теоремы 4 строим две билиардные книжки $\mathcal{B}_P$ и $\mathcal{B}_Q$ для атомов P и Q соответственно. Все листы таких билиардных книжек согласно алгоритму теоремы 4 имеют тип A'_0 (ограничены прямыми $\lambda = a$ и $\lambda = b$ и софокусными эллипсом и гиперболой (см. рис. 10)).
2. Все листы билиардной книжки $\mathcal{B}_Q(X_Q, \Sigma_Q, N_Q)$ заменим на листы типа B_0 (см. рис. 9), ограниченные прямой $\lambda = a$, гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$ и двумя софокусными эллипсами (выпуклым и невыпуклым) с параметрами 0 и λ_1 . Все листы билиардной книжки $\mathcal{B}_P(X_P, \Sigma_P, N_P)$ также заменим на листы типа B_0 , но теперь с параметрами эллипсов 0 и λ_2 . Замена всех листов — это изменение метрики на листах билиардного комплекса. Итак, мы получили две билиардные книжки $\mathcal{B}'_P$ и $\mathcal{B}'_Q$, изменив $\mathcal{B}_P$ и $\mathcal{B}_Q$. Позже докажем, что от такого изменения грубые молекулы, отвечающие этим книжкам, не изменятся, и они также, как и раньше, будут отвечать атомам P и Q (см. лемму 5).
3. Рассмотрим несвязное объединение $\mathcal{B} = \mathcal{B}'_P \sqcup \mathcal{B}'_Q$ (см. опр. 32). Будем менять перестановку $\sigma[0]$ книжки $\mathcal{B}$ так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные нам ребра. Тем самым мы склеим книжки $\mathcal{B}'_P, \mathcal{B}'_Q$ по верхней границе.
4. Выберем на атоме Q ребро (тор), которое хотим склеить. Пусть λ — любое значение интеграла Λ , находящееся между атомом P и Q , то есть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Рассмотрим разложение композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов ($\Pi[\lambda]$ — перестановка уровня из опр. 31) и найдем тот цикл, который соответствует фиксированному тору в атоме Q (см. лемму 4). Обозначим этот цикл через $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Получаем, что:

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = \alpha \circ X,$$

где X — произведение оставшихся независимых циклов.

5. Фиксируем произвольный номер из цикла α , например, α_1 . Согласно лемме 4 это номер листа, по которому траектория идет вниз при проекции фиксированного тора атома Q на бильярдную книжку.
6. Прделаем предыдущие 2 шага также для атома P . Результатом этих шагов является некоторый номер β_1 .
7. Заменяем перестановку $\sigma[0]$ на новую $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Как говорилось в предыдущих пунктах, номерам листов α_1, β_1 сопоставлены два тора. При такой замене перестановки с $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$ эти два тора склеятся. При этом траектория, которая после удара от верхней границы переходила на лист с номером α_1 , стала переходить на лист с номером β_1 . Иными словами, траектория раньше шла вверх по листу с номером $\sigma[0]^{-1}(\alpha_1)$, ударялась от верхней границы, переходила на лист с номером α_1 и шла по нему вниз. При замене перестановки эта траектория после удара от верхней границы будет идти вниз по листу с номером β_1 вместо листа с номером α_1 . То же самое верно и для траектории, которая до этой замены перестановки шла вниз по листу с номером β_1 .
8. Новая перестановка $\sigma'[0]$ полностью описывает то, как в результате выглядит новый комплекс X' в окрестности верхней границы листов, и какие перестановки приписаны верхним корешкам листов. Поэтому на основе новой перестановки $\sigma'[0]$ перестроим комплекс X в новый комплекс X' следующим образом.

Отменим (разрежем) все склейки на верхних дугах листов (дугах эллипса с параметром, равным 0) комплекса X . Разложим перестановку $\sigma'[0]$ в независимые циклы: $\sigma'[0] = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_t, t \in \mathbb{N}$. Каждому независимому циклу $\gamma_i = (\gamma_{i,1} \gamma_{i,2} \dots \gamma_{i,s}), s \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, t$ перестановки $\sigma'[0]$ соответствует некоторый корешок e_i^1 . Этот корешок склеивает в точности те листы, номера которых цикл γ_i переставляет. То есть в границе листов с номерами $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,s}$ лежит корешок e_i^1 , а перестановку, приписанную этому корешку положим равной этому циклу: $\Sigma'[e_i^1] = \gamma_i$. Иными словами, листы, отвечающие одному независимому циклу перестановки $\sigma'[0]$, склеиваются по верхней границе. Похожее построение было описано в лемме 3.

Бильярдная книжка $\mathcal{B}'(X', \Sigma', N)$ с перестроенными по перестановке $\sigma'[0]$ комплексом X' и перестановками Σ' имеет грубую молекулу, изображенную на рис. 25, и является результатом алгоритма 3.

Для склейки произвольных атомов по ребру нам понадобится обобщить два алгоритма моделирования 3-атомов (со звездочками и без) так, чтобы в седловых атомах без звездочек тоже была склейка слева. Для этого нужно будет научиться строить “дубли” для атомов без звездочек.

Алгоритм 4 (общий алгоритм моделирования 3-атомов). Этот алгоритм совпадает для 3-атомов со звездочками с алгоритмом 2.

В случае, если дан 3-атом U без звездочек, построим для него простейший дубль следующим образом. Рассмотрим 2-атом P такой, что $U = P \times S^1$. Возьмем две копии атома P . Получим несвязный атом $\hat{P} = P \sqcup P$. И определим на нем инволюцию τ , которая одну копию отражает на другую. Очевидно, что факторизация по этой инволюции даст один 2-атом P . А если выполнить операцию построения 3-атома для атома $\hat{P}$ и инволюции τ , описанную в главе 4 в пункте 2 построения атомов, то получится тот же 3-атом U . Поэтому к 3-атомам без звездочек также можно применить алгоритм 2 моделирования 3-атомов со звездочками, в результате которого получится бильярдная книжка $\mathcal{B}'$ с нетождественной склейкой слева, являющейся инволюцией.

Пусть результатом алгоритма 1 моделирования 3-атомов без звездочек является билиардная книжка $\mathcal{B}$. Заметим, что книжка $\mathcal{B}'$ является “удвоенной копией” книжки $\mathcal{B}$. Более точно: книжка $\mathcal{B}'$ может быть получена с точностью до перенумерации листов в результате следующих операций. Берем несвязное объединение $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ двух копий книжек $\mathcal{B}$ и склеиваем их друг с другом по левой границе. Иными словами, меняем перестановку $\sigma[a]$ на квадрике, отвечающую левой границе листов, на инволюцию $\sigma'[a]$, отображающую одну копию листа на другую. Билиардная книжка $\mathcal{B}'$ получается заменой левой границы листов $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ в соответствии с перестановкой $\sigma'[a]$.

Алгоритм 5 (склейки по ребру двух произвольных атомов, со звездочками или без). Даны два произвольных 3-атома P и Q , которые могут быть как со звездочками, так и без. Аналогично алгоритму 3 склеим эти два атома по выбранному ребру так, чтобы значение интеграла, которому соответствует атом Q , было меньше значения интеграла, которому соответствует атом P . Обозначения и схема также аналогичны алгоритму 3.

1. Выполняем первые 3 шага алгоритма 3, за исключением того, что для построения билиардных книжек $\mathcal{B}_P$ и $\mathcal{B}_Q$ будем использовать общий алгоритм 4 моделирования 3-атомов. В результате получается билиардная книжка $\mathcal{B}$, у которой перестановка $\sigma[a]$ на квадрике, отвечающая левой границе листов, является нетождественной. Эта перестановка задает инволюцию на листах билиардной книжки $\mathcal{B}$.
2. Рассмотрим также книжку $\hat{\mathcal{B}}$, которую получим из книжки $\mathcal{B}$, положив перестановку $\sigma[a]$ тождественной и убрав все склейки слева в комплексе X . Напомним, что по построению в общем алгоритме 4 моделирования 3-атомов инволюция $\sigma[a]$ описывает инволюции τ на дублях атомов. Значит, если положить перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то мы снова получим дубли вместо атомов. То есть в книжке $\hat{\mathcal{B}}$ на критических уровнях интеграла Λ возникают дубли атомов, появляющихся на тех же критических уровнях в книжке $\mathcal{B}$.
3. Выберем на атоме Q ребро (тор), которое хотим склеить. В книжке $\hat{\mathcal{B}}$ в окрестности уровня λ_2 вместо атома Q получается некоторый дубль $\hat{Q}$ этого атома. Как уже было отмечено в замечании 25 в этом дубле выбранному ребру (тору) соответствует одно или два ребра (тора). Фиксируем любое из них. Снова согласно лемме 4 можно выбрать независимый цикл, соответствующий данному ребру на дубле $\hat{Q}$, и выбрать в нем номер α_1 .
4. Выполним действия предыдущего шага для атома P . Результатом этих действий является некоторый номер β_1 .
5. Главным отличием этого алгоритма от алгоритма склейки атомов без звездочек по ребру будет заключаться в том, что наши перестройки должны быть инвариантны относительно инволюции $\sigma[a]$ (перестановки, отвечающей левой границе, которая является инволюцией по построению в алгоритме 4). Поэтому изменения перестановки $\sigma[0]$ требуют такие же изменения на листах, симметричных относительно инволюции $\sigma[a]$. Это требование обеспечивает коммутруемость перестановок, описанную в лемме 2.

Итак, пусть $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$, — образы листов α_1, β_1 при инволюции $\sigma[a]$.

Ранее, на шаге 7 алгоритма 3 новая перестановка $\sigma'[0]$ определялась, как композиция $(\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Теперь положим $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Такая новая перестановка $\sigma'[0]$ инвариантна относительно инволюции $\sigma[a]$, то есть верхняя перестановка $\sigma'[0]$ и левая перестановка $\sigma[a]$ коммутируют (этот простой факт будет доказан в предложении ниже).

Биллиардная книжка $\mathcal{B}'(X', \Sigma', N)$ с перестроенными по перестановке $\sigma'[0]$ комплексом X' и перестановками Σ' имеет грубую молекулу, изображенную на рис. 25 и является результатом алгоритма 5.

Доказательство. В алгоритме 5 выше перестановка $\sigma'[0]$ определена как $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$, где $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$. Также известно, что перестановка $\sigma[a]$ является инволюцией, и коммутируют перестановки $\sigma[0]$ и $\sigma[a]$. Докажем, что $\sigma'[0] \circ \sigma[a] = \sigma[a] \circ \sigma'[0]$.

Поскольку перестановка $\sigma[a]$ — инволюция, и $\hat{\alpha}_1 = \sigma[a](\alpha_1)$, $\hat{\beta}_1 = \sigma[a](\beta_1)$, то ее можно представить как $\sigma[a] = (\alpha_1 \hat{\alpha}_1) \circ (\beta_1 \hat{\beta}_1) \circ T$, где T — произведение оставшихся независимых циклов, в которых не встречаются числа $\alpha_1, \beta_1, \hat{\alpha}_1$ и $\hat{\beta}_1$. Итак,

7

The figure consists of two main parts: a sequence of diagrams on the left and a stack of planes on the right.

Top Row Diagrams: These diagrams illustrate the construction of $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$ from $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ and $\tilde{W}$. The vertical axis is labeled with $a, b, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, 0$. The horizontal axis is labeled with $\tilde{W}$ and $\tilde{\Lambda} = \Lambda$. The sequence of diagrams shows the evolution of the state from $\tilde{W}$ to $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ through intermediate states W_0 and W_1 . The diagrams show the addition of new components (solid lines) and the removal of old components (dashed lines) to the state.

Bottom Row Diagrams: These diagrams illustrate the construction of $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ from $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ and $\tilde{W}$. The vertical axis is labeled with $a, b, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, 0$. The horizontal axis is labeled with $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ and $\tilde{W}$. The sequence of diagrams shows the evolution of the state from $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ to $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$ through intermediate states W_1 , W_2 , and $W_3 = \tilde{W}$. The diagrams show the addition of new components (solid lines) and the removal of old components (dashed lines) to the state.

Right Side Diagram: A stack of three planes labeled $\mathcal{B}'_B$, $\mathcal{B}_{A^*}$, and $\mathcal{B}'_{D_2}$. The planes are stacked vertically, with $\mathcal{B}'_B$ at the top, $\mathcal{B}_{A^*}$ in the middle, and $\mathcal{B}'_{D_2}$ at the bottom.

34

1. Грубая молекула строится по некоторой функции, а после ее построения функция забывается. Но для моделирования грубой молекулы нам нужно восстановить функцию, по которой она строилась. Для этого сначала восстановим ориентацию на грубой молекуле $\tilde{W}$ (см. замечание 17), то есть ориентируем ребра графа молекулы $\tilde{W}$ так, чтобы они соответствовали возрастанию функции.

Возьмем произвольный седловой атом P грубой молекулы $\tilde{W}$. Каждый атом (за исключением атомов A минимума и максимума) содержит два типа колец, находящиеся по разные стороны от критического уровня. Определимся с направлением функции на атоме P , то есть считаем, что один тип колец находится ниже критического уровня, второй тип — выше. Распространим это направление на всю молекулу $\tilde{W}$ следующим образом. Возьмем каждое из ребер, которое выходит из атома P . Если оно соответствует кольцу на атоме P , которое ниже критического уровня, то ориентируем это ребро так, чтобы оно входило в атом P , выше критического — выходило. Основываясь на ориентации этих ребер определяем направление функции на соседних атомах. И далее тем же способом определяем ориентацию на всех ребрах графа. Заметим, что согласно замечанию 18 о круговых молекулах в полученном ориентированном графе молекулы $\tilde{W}$ нет циклов.

2. Основываясь на ориентации ребер на грубой молекуле $\tilde{W}$, восстановим непрерывную функцию $\tilde{\Lambda} : \tilde{W} \rightarrow [0, a]$ следующим образом. Всем атомам A минимума (из которых ребро выходит) сопоставим значение 0, максимума (в которые ребро входит) — a . Все остальные $n \in \mathbb{N}$ атомов расположим на произвольных различных уровнях $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ таких, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < b$, и если атомы P и Q соединены ребром в направлении от атома P к атому Q , то $\tilde{\Lambda}(P) < \tilde{\Lambda}(Q)$. Это сделать возможно, поскольку в графе молекулы $\tilde{W}$ нет циклов, а значит на вершинах этого графа можно ввести топологический порядок. Распространим непрерывно и монотонно функцию $\tilde{\Lambda}$ на ребра грубой молекулы $\tilde{W}$. Получим, что все ребра на грубой молекуле $\tilde{W}$ направлены по возрастанию функции $\tilde{\Lambda}$ (см. рис. 26).

Будем строить билиардную книжку $\mathcal{B}(X, \Sigma, N)$ так, чтобы грубая молекула W билиардной книжки с квадратичным интегралом Λ совпала с заданной грубой молекулой $\tilde{W}$, а интеграл Λ на грубой молекуле W совпал с только что построенной функцией $\tilde{\Lambda}$ на грубой молекуле $\tilde{W}$.

3. Для каждого атома P_i , $i = 1, \dots, n$ построим по общему алгоритму 4 моделирования 3-атомов билиардную книжку $\mathcal{B}_{P_i}$. Заменим в ней листы на листы типа B_0 , ограниченные слева вертикальной прямой (кривой из семейства с параметром a), справа гиперболой с параметром $\tilde{\Lambda}$, а сверху и снизу двумя эллипсами с параметрами 0 и $\tilde{\Lambda}(P_i)$ соответственно.
4. Рассмотрим объединение книжек $\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^n \mathcal{B}_{P_i}$ (см. опр. 32). Молекула W для книжки $\mathcal{B}$ изображена на рис. 26. У нее все атомы A минимума находятся на уровне $\Lambda = 0$, максимума — на уровне $\Lambda = a$, а атомы P_i на уровнях $\tilde{\Lambda}(P_i)$, где $i = 1, \dots, n$. Осталось правильно соединить ребра и убрать лишние атомы A .
5. Для каждого ребра, соединяющего два седловых атома P и Q в грубой молекуле $\tilde{W}$, применяем шаги 3-6 алгоритма 5. Перебирать ребра можно в любом порядке. После каждой итерации два ребра, которые были присоединены к атомам A минимума или максимума, склеятся в одно ребро. Таким образом, после каждой итерации мы реализуем одно ребро из грубой молекулы $\tilde{W}$ в молекуле W (см. рис. 26). Алгоритм завершается, когда мы реализуем все ребра в грубой молекуле $\tilde{W}$, соединяющие седловые атомы.

Построенная билиардная книжка является результатом алгоритма 6.

7 Примеры моделирования атомов и грубых молекул.

Будем моделировать грубую молекулу $\tilde{W}$, изображенную на рис. 26. Сначала построим билиардные книжки класса **a** для 3-атомов B и D_2 , которые встречаются в выбранной грубой молекуле $\tilde{W}$, по алгоритму 1. Эти 3-атомы — без звездочек, поэтому являются тривиальным расслоением над соответствующими 2-атомами со слоем окружность. Эти 2-атомы B и D_2 представлены в таблице на рис. 17, а 3-атом B — на рис. 18.

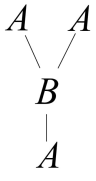
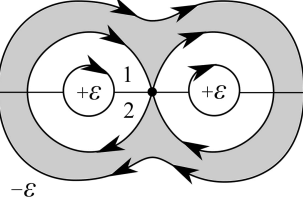
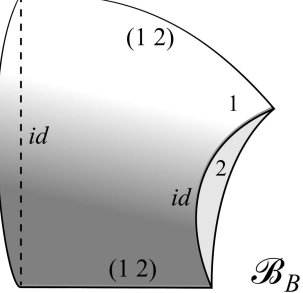
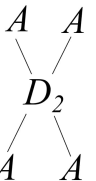
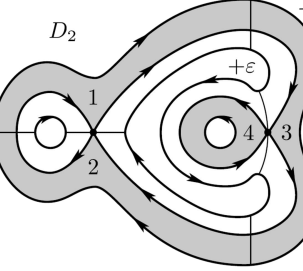
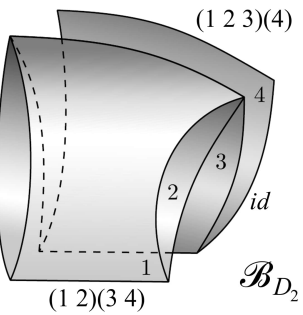
Атом	Разбиение на полукресты	Результат
		
		

Рис. 27: Пример использования алгоритма 1 для построения книжек для атомов B и D_2 .

Пример 1 (моделирования 3-атомов B и D_2 при помощи алгоритма 1). На критическом уровне 2-атомов B и D_2 зададим ориентацию так, чтобы уровни интеграла, которые меньше критического, (закрашенные кольца на рис. 27) оставались слева. Распространим эту ориентацию по непрерывности на близкие регулярные уровни интеграла. Представим 2-атомы B и D_2 в виде склейки из крестов. Разобьем каждый крест на два полукреста по положительному уровню. Занумеруем полукресты как показано на рис. 27.

Каждому полукресту будет соответствовать лист на билиардной книжке. Книжка $\mathcal{B}_B$ класса **a**, моделирующая 3-атом B , будет состоять из двух листов типа A'_0 (лист этого типа изображен на рис. 10). Книжка $\mathcal{B}_{D_2}$, моделирующая 3-атом D_2 , — из четырех. Занумеруем листы на этих книжках в соответствии с нумерацией полукрестов.

Положим перестановки справа и слева у этих книжек тождественными: $\sigma_B(\tilde{\lambda}) = id$, $\sigma_B(a) = id$, $\sigma_{D_2}(\tilde{\lambda}) = id$ и $\sigma_{D_2}(a) = id$.

Перестановка снизу определяется на основе склейки полукрестов в кресты. В 2-атоме B первый полукрест склеен со вторым. Значит, $\sigma_B(b) = (1 2)$, где $\sigma_B(b)$ — нижняя перестановка книжки $\mathcal{B}_B$. В 2-атоме D_2 первый полукрест склеен со вторым полукрестом, третий — с четвертым. Значит, $\sigma_{D_2}(b) = (1 2)(3 4)$, где $\sigma_{D_2}(b)$ — нижняя перестановка книжки $\mathcal{B}_{D_2}$.

Верхняя перестановка определяется на основе склейки крестов в атомы. В 2-атоме B исходящая стрелка первого полукреста ведет во второй полукрест, второго — в первый. Значит, $\sigma_B(0)(1) = 2$, $\sigma_B(0)(2) = 1$, где $\sigma_B(0)$ — верхняя перестановка книжки $\mathcal{B}_B$. То есть $\sigma_B(0) = (1\ 2)$. В 2-атоме D_2 исходящая стрелка первого полукреста ведет третий полукрест, поэтому $\sigma_{D_2}(0)(1) = 3$, где $\sigma_{D_2}(0)$ — верхняя перестановка книжки $\mathcal{B}_{D_2}$. Аналогично получаем, $\sigma_{D_2}(0)(3) = 2$, $\sigma_{D_2}(0)(2) = 1$, $\sigma_{D_2}(0)(4) = 4$. То есть $\sigma_{D_2}(0) = (1\ 2\ 3)(4)$.

Согласно следствию 1 леммы 3 для построения билиардной книжки класса $\mathbf{a}$ этих перестановок достаточно, чтобы полностью задать билиардные книжки $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2}$. Эти билиардные книжки представлены на рис. 27.

Рассмотрим теперь 3-атом A^* . Он тоже встречается в выбранной грубой молекуле $\tilde{W}$. Он также представлен на рис. 18. Кроме того, он изображается в виде 2-атома, как показано на рис. 28. Рассмотрим алгоритм 2 на примере этого 3-атома и построим моделирующую его билиардную книжку $\mathcal{B}_{A^*}$.

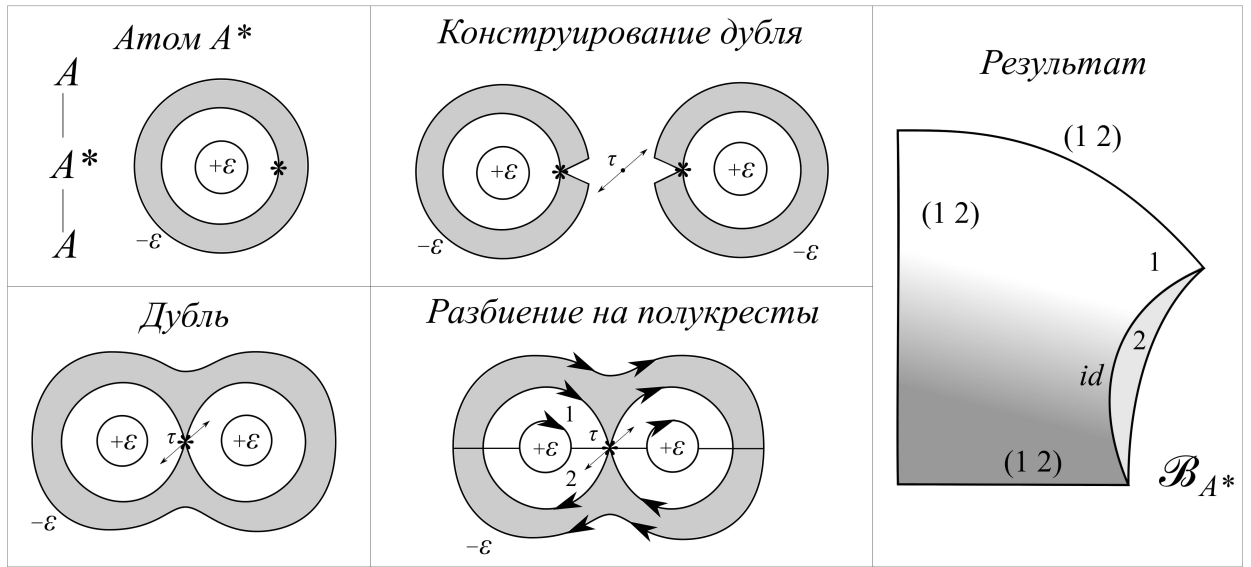


Рис. 28: Пример использования алгоритма 2 для построения книжки для атома A^* . Инволюция τ на дубле представлена как центральная симметрия.

Пример 2 (моделирования 3-атома A^* при помощи алгоритма 2). Сконструируем для атома A^* дубль $\hat{A}^*$ с инволюцией $\tau : \hat{A}^* \rightarrow \hat{A}^*$ по замечанию 26 следующим образом. Разрежем кольцо на соответствующем 2-атоме A^* так, как показано на рис. 28. Берем копию получившегося разрезанного 2-атома. Склеиваем эти копии по разрезанной части. Получаем атом B — дубль для атома A^* . Инволюция τ на дубле представлена в виде центральной симметрии.

Режем дубль на полукресты. Нумеруем их (см. рис. 28). Из дубля B получается 2 полукреста. Значит, у билиардной книжки, соответствующей атому A^* будет два листа типа A'_0 .

Для вычисления всех перестановок, кроме левой, используем алгоритм 1. Правая перестановка $\sigma_{A^*}[\tilde{\lambda}] = id$ — тождественная. Полукресты 1 и 2 образуют крест. Поэтому для нижней перестановки верно: $\sigma_{A^*}[b] = (1\ 2)$. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со входящей стрелкой второго полукреста, второго — с первой. Поэтому для верхней перестановки верно: $\sigma_{A^*}[0] = (1\ 2)$.

Левая перестановка определяется на основе инволюции τ . Эта инволюция отображает первый полукрест на второй и второй на первый. Значит, $\sigma_{A^*}[a](1) = 2$ и $\sigma_{A^*}[a](2) = 1$, т. е. $\sigma_{A^*}[a] = (1\ 2)$.

Снова используем следствие 1 леммы 3 для построения билиардной книжки класса **a**. По этой лемме описанные выше четыре перестановки полностью задают билиардную книжку $\mathcal{B}_{A^*}$. Эта билиардная книжка представлена на рис. 28.

Теперь проиллюстрируем работу алгоритма 3 на примере склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру.

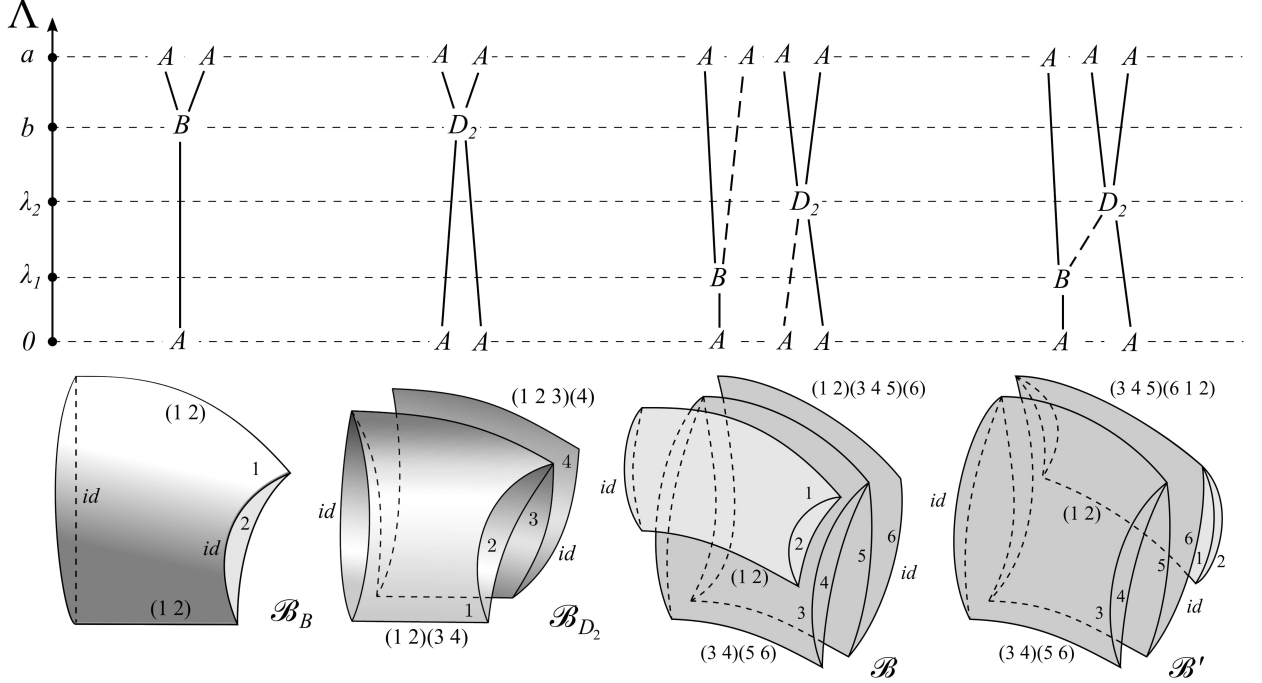


Рис. 29: Пример использования алгоритма 3 для склейки 3-атомов B и D_2 по ребру.

Пример 3 (склейки 3-атомов B и D_2 по ребру). В этом примере мы собираемся выполнить преобразования над книжками $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2}$, полученными в примере 1, так, чтобы в соответствующих им грубых молекулах атом B склеился с атомом D_2 по ребру (см. рис. 29). При этом после этой склейки атом B будет находиться ниже атома D_2 , верхнее пунктирное ребро атома B склеится с нижним пунктирным ребром атома D_2 , а атомы A на других концах этих ребер пропадут.

Сначала расположим атомы B и D_2 на разных уровнях: λ_1 и λ_2 , таких что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b$. Чтобы атом B оказался на уровне λ_1 , а атом D_2 — на уровне λ_2 , поменяем нижние границы листов у книжек $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2}$, а именно, сделаем их дугами эллипсов с соответствующими параметрами: λ_1 для B и λ_2 для D_2 . Возьмем несвязное объединение этих книжек (операция несвязного объединения введена в опр. 32). В итоге получится билиардная книжка $\mathcal{B}$, представленная на рис. 29. Заметим, что у нее сдвинулась нумерация на листах, отвечающих книжке $\mathcal{B}_{D_2}$: лист 1 перешел в лист 3, 2 в 4, 3 в 5, 4 в 6. Перестановки переписались в соответствии с этой перенумерацией: $\sigma[0] = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6)$, $\sigma[\lambda_1] = (1\ 2)$, $\sigma[\lambda_2] = (3\ 4)(5\ 6)$. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке $\mathcal{B}$ так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные ребра. Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Поскольку нижние дуги листов книжки $\mathcal{B}$ имеют параметры λ_1 или λ_2 , то перестановка уровня $\Pi[\lambda]$ из опр. 31 выглядит так

$$\Pi[\lambda] = \prod_{\lambda_i < \lambda} \sigma[\lambda_i] = \sigma[\lambda_1] = (1\ 2).$$

Рассмотрим разложение в независимые циклы композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6) \circ (1\ 2) = (1)(2)(3\ 4\ 5)(6)$. Согласно лемме 4 есть взаимно-однозначное соответствие между

двумерными торами Лиувилля на уровне $\Lambda = \lambda$ и этими независимыми циклами. Для наглядности изобразим проекцию этих торов на листы книжки $\mathcal{B}$. Каждому из таких торов соответствуют некоторые траектории на книжке $\mathcal{B}$. На рис. 30 представлено, по какой части листов книжки $\mathcal{B}$ могут идти эти траектории и в каком направлении: вверх или вниз.

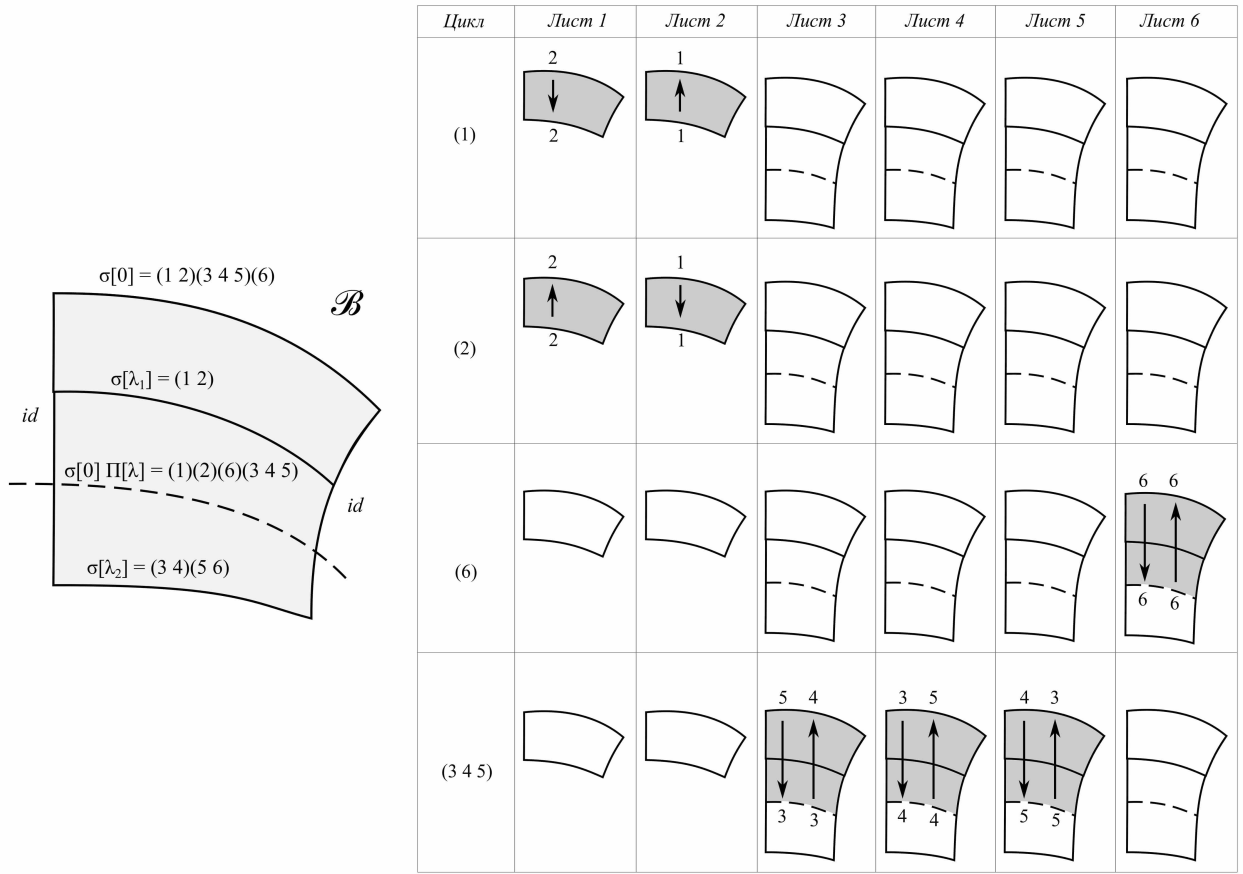


Рис. 30: Проекция торов Лиувилля на листы книжки $\mathcal{B}$. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Пунктирным ребрам (торам) атомов B и D_2 соответствуют некоторые циклы. Пусть это будут циклы (1) и (6). Нужно выбрать из каждого цикла произвольный номер. Здесь это можно сделать единственным образом. Получим номера 1 и 6. Заменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (16) \circ \sigma[0] = (16) \circ (12)(345)(6) = (126)(345)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой: каждый независимый цикл в разложении перестановки $\sigma'[0]$ соответствует одному корешку (одномерной клетке), который склеивает в точности те листы, которые этот цикл переставляет (см. рис. 29). Получившаяся в результате новая книжка $\mathcal{B}'$ будет иметь нужную грубую молекулу.

Заметим, что на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (1) и (6), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = \sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = (126)(345) \circ (12) = (16)(2)(345)$, то можно увидеть, что циклы (1) и (6) склеились в один цикл (16). На рис. 31 представлена проекция торов для новой книжки $\mathcal{B}'$. Видно, что новому циклу (16) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (1) и (6). Для других циклов движение материальной точки не меняется.

Покажем, что алгоритм 3 можно также использовать для последующей приклейки двух ребер, то есть действия, описанные в нем, меняют грубую молекулу локально.

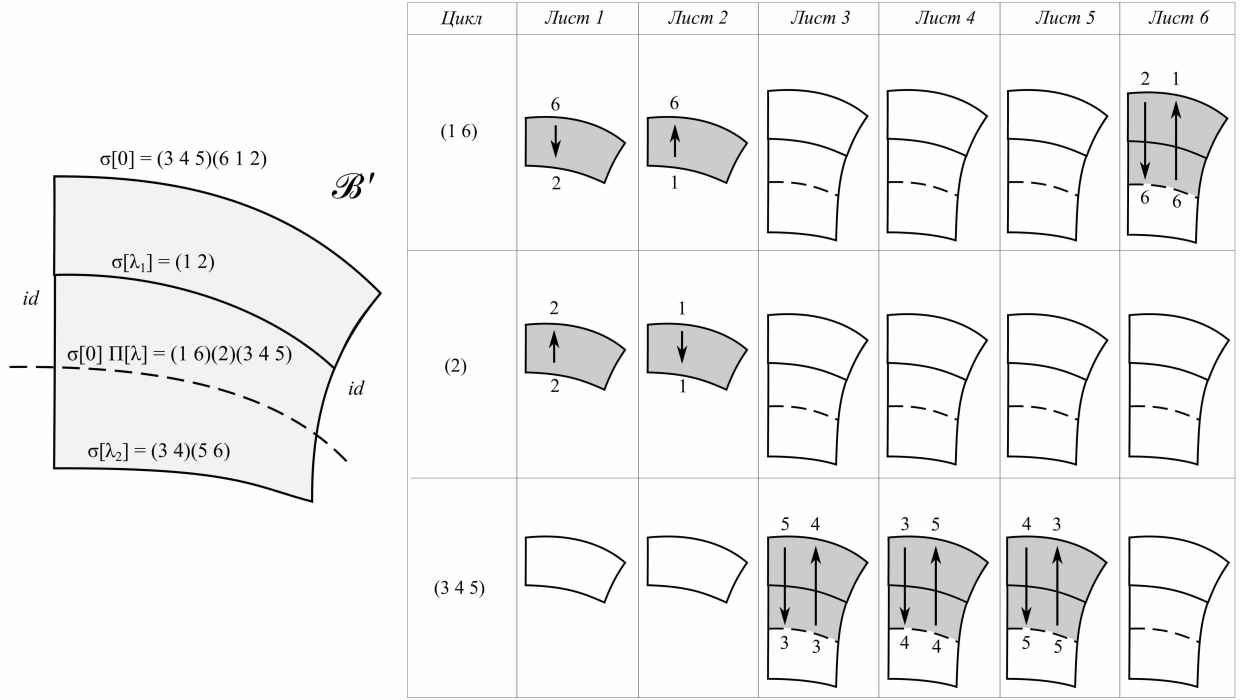


Рис. 31: Проекция торов Лиувилля на листы книжки $\mathcal{B}'$. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Пример 4 (склейки 3-атомов B и D_2 по двум ребрам). В этом примере выполним преобразования над книжкой $\mathcal{B}'$, полученной в примере 3, так, чтобы в соответствующей ей грубой молекуле склеилась еще одна пара ребер (см. рис. 32).

В предыдущем примере мы получили, что $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (1\ 6)(2)(3\ 4\ 5)$. Пусть пунктирные ребра соответствуют циклам (2) и (3 4 5). Выберем из каждого цикла произвольный номер. Получим 2 и 3. Заменяем верхнюю перестановку $\sigma'[0]$ на новую $\sigma''[0] = (2\ 3) \circ \sigma'[0] = (2\ 3) \circ (1\ 2\ 6)(3\ 4\ 5) = (2\ 6\ 1\ 3\ 4\ 5)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой (см. рис. 29). Получившаяся в результате новая книжка $\mathcal{B}''$ имеет нужную грубую молекулу.

При этом на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (2) и (3 4 5), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma''[0] \circ \Pi''[\lambda] = (2\ 6\ 1\ 3\ 4\ 5) \circ (1\ 2) = (1\ 6)(2\ 3\ 4\ 5)$, то можно увидеть, что циклы (2) и (3 4 5) склеились в один цикл (2 3 4 5). На рис. 33 представлена проекция торов для новой книжки $\mathcal{B}''$. Видно, что новому циклу (2 3 4 5) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (2) и (3 4 5). Для оставшегося цикла (1 6) движение материальной точки не меняется.

Предыдущие два примера иллюстрировали алгоритм 3, который может работать только с атомами без звездочек. Следующим шагом будет переход к произвольным атомам. В отличие от атомов без звездочек, у атомов со звездочками есть инволюция и склейка слева на соответствующей им книжке. Поскольку мы не можем просто склеить атом с инволюцией с атомом без инволюции, то нужно научиться строить инволюцию для атомов без звездочек. При этом на бильярдной книжке, соответствующей таким атомам появится склейка слева. Для этого был сформулирован алгоритм 4. Он совпадает с алгоритмом 2 для атомов со звездочками и модифицирует алгоритм 1 для атомов без звездочек. Используя его, построим новые книжки для атомов B и D_2 .

Пример 5. Сконструируем для атомов B и D_2 дубли $\hat{B}$ и $\hat{D}_2$ с инволюциями $\tau_B : \hat{B} \rightarrow \hat{B}$ и $\tau_{D_2} : \hat{D}_2 \rightarrow \hat{D}_2$ по алгоритму 4 следующим образом. Дублем для атомов B

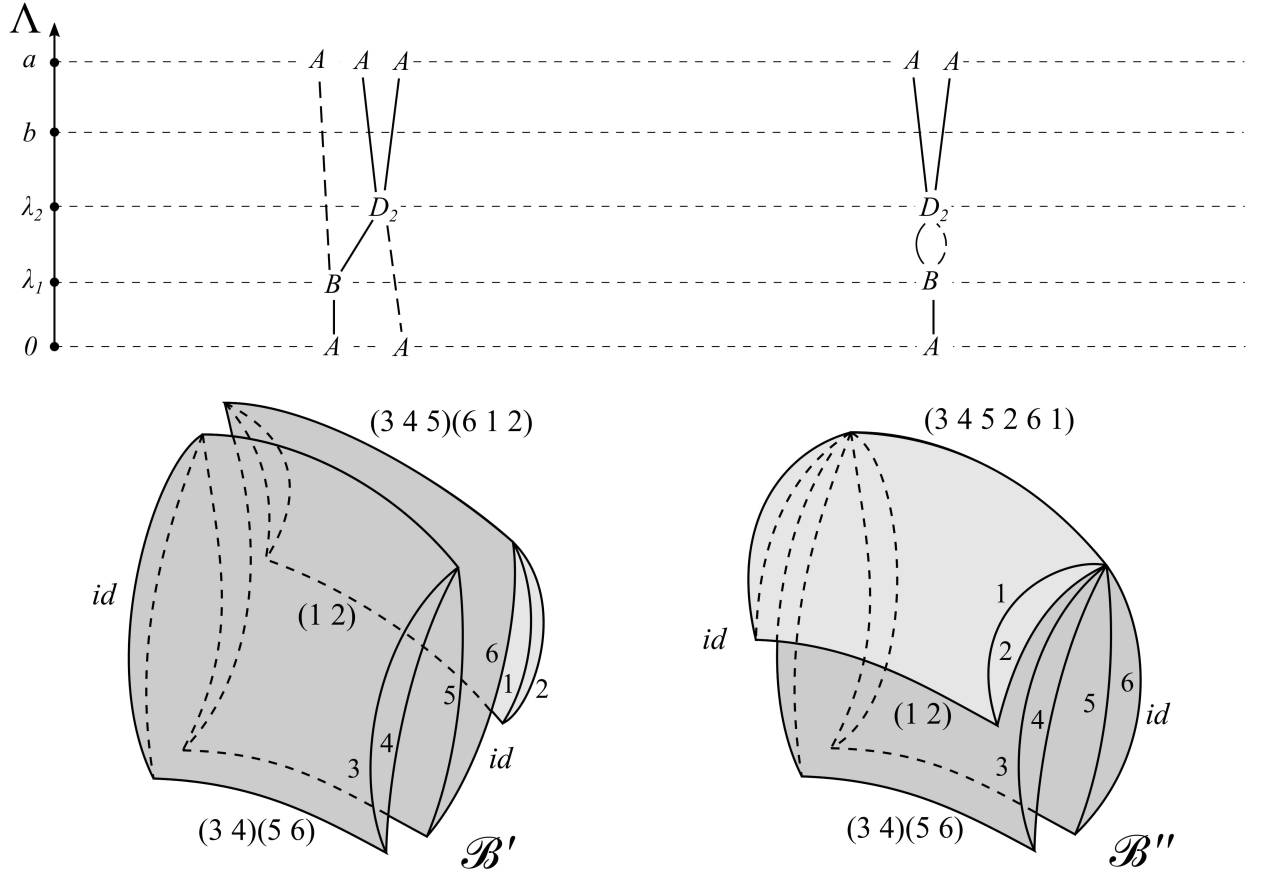


Рис. 32: Пример использования алгоритма 3 для склейки 3-атомов B и D_2 по двум ребрам.

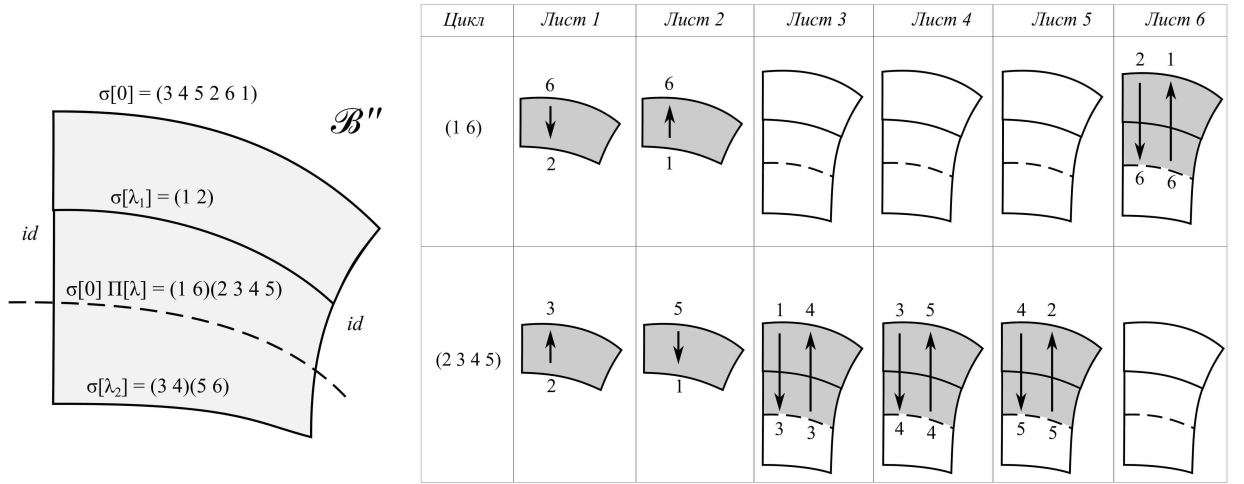


Рис. 33: Проекция торов Лиувилля на листья книжки $\mathcal{B}'$. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

и D_2 являются пары копий соответствующих 2-атомов B и D_2 (см. рис. 34). Инволюции τ_B и τ_{D_2} отражают одну копию на другую. Теперь можно применить алгоритм 2 моделирования атомов со звездочками к атомам B и D_2 без звездочек.

Режем дубль $\hat{B}$ на полукресты. Нумеруем их (см. рис. 34). Из дубля $\hat{B}$ получается 4 полукреста. Значит, у бильярдной книжки, соответствующей атому B будет 4 листа типа A'_0 . Правая перестановка $\sigma'_B[\hat{\lambda}] = id$ — тождественная. Нижняя перестановка $\sigma'_B[b]$ определяется на основе склейки полукрестов в кресты. Полукресты 1 и 2, 3 и 4 обра-

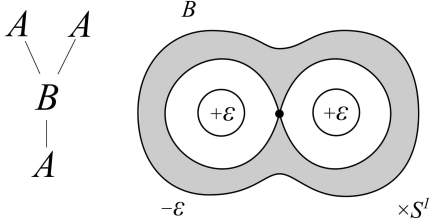
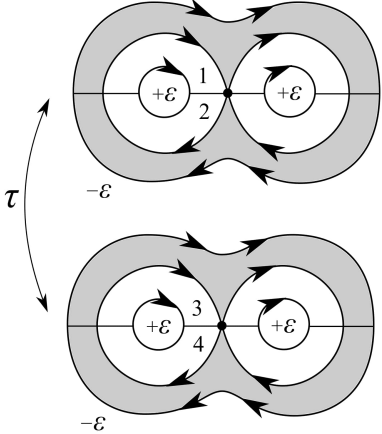
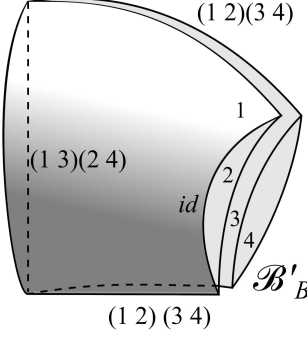
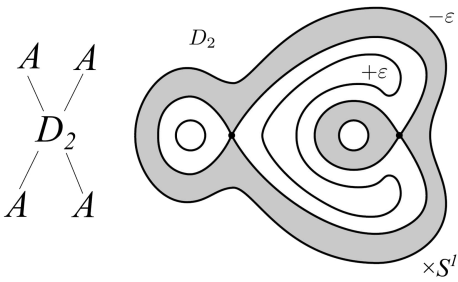
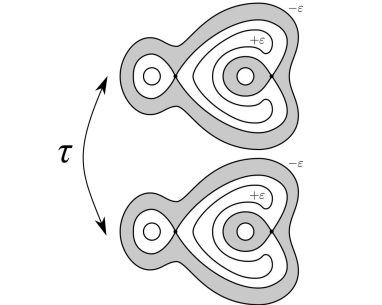
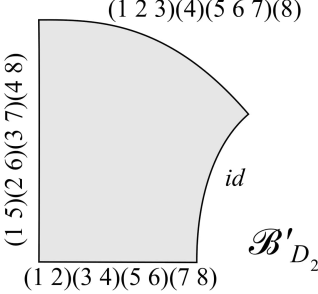
Атом	Разбиение дубля на полукресты	Результат
		
		

Рис. 34: Пример использования алгоритма 4 для моделирования атомов B и D_2 . Инволюция τ на рисунке отображает одну копию атома на другую.

зуют два креста. Поэтому для нижней перестановки верно: $\sigma'_B[b] = (1\ 2)(3\ 4)$. Верхняя перестановка $\sigma'_B[a]$ определяется на основе склейки крестов в атоме. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со входящей стрелкой второго полукреста, $2 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 3$. Поэтому для верхней перестановки верно: $\sigma'_B[0] = (1\ 2)(3\ 4)$. Левая перестановка определяется на основе инволюции τ . Эта инволюция отображает первый полукрест на третий, второй на четвертый, третий на первый и четвертый на второй. Значит, $\sigma'_B[a] = (1\ 3)(2\ 4)$.

Аналогично получаем перестановки для атома D_2 : $\sigma'_{D_2}[\tilde{\lambda}] = id$, $\sigma'_{D_2}[b] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$, $\sigma'_{D_2}[0] = (1\ 2\ 3)(4)(5\ 6\ 7)(8)$, $\sigma'_{D_2}[a] = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$.

Используем следствие 1 леммы 3 для построения билиардных книжек класса **a**. По этой лемме описанные выше перестановки полностью задают билиардные книжки $\mathcal{B}'_B$ и $\mathcal{B}'_{D_2}$, моделирующие атомы B и D_2 соответственно.

Эти же книжки можно также получить другим путем. Возьмем книжки $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2}$, полученные в примере 1. Удвоим их — рассмотрим книжки $\mathcal{B}_B \sqcup \mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_{D_2} \sqcup \mathcal{B}_{D_2}$. Сейчас левые перестановки на удвоенных книжках являются тождественными. Поменяем их на инволюцию, отображающую одну копию листа на другую, то есть положим $\sigma'_B[a] = (1\ 3)(2\ 4)$ и $\sigma'_{D_2}[a] = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$. Поменяем левую границу листов в соответствии с этой заменой перестановок. Получившиеся билиардные книжки совпадают с книжками $\mathcal{B}'_B$ и $\mathcal{B}'_{D_2}$.

Теперь покажем, как можно склеить два произвольных атома по ребру на примере склейки атома B без звездочек и атома A^* со звездочкой.

Пример 6 (склейки 3-атомов B и A^* по ребру). Этот пример иллюстрирует алгоритм 5 склейки двух произвольных атомов, со звездочками или без. Этот алгоритм основан на

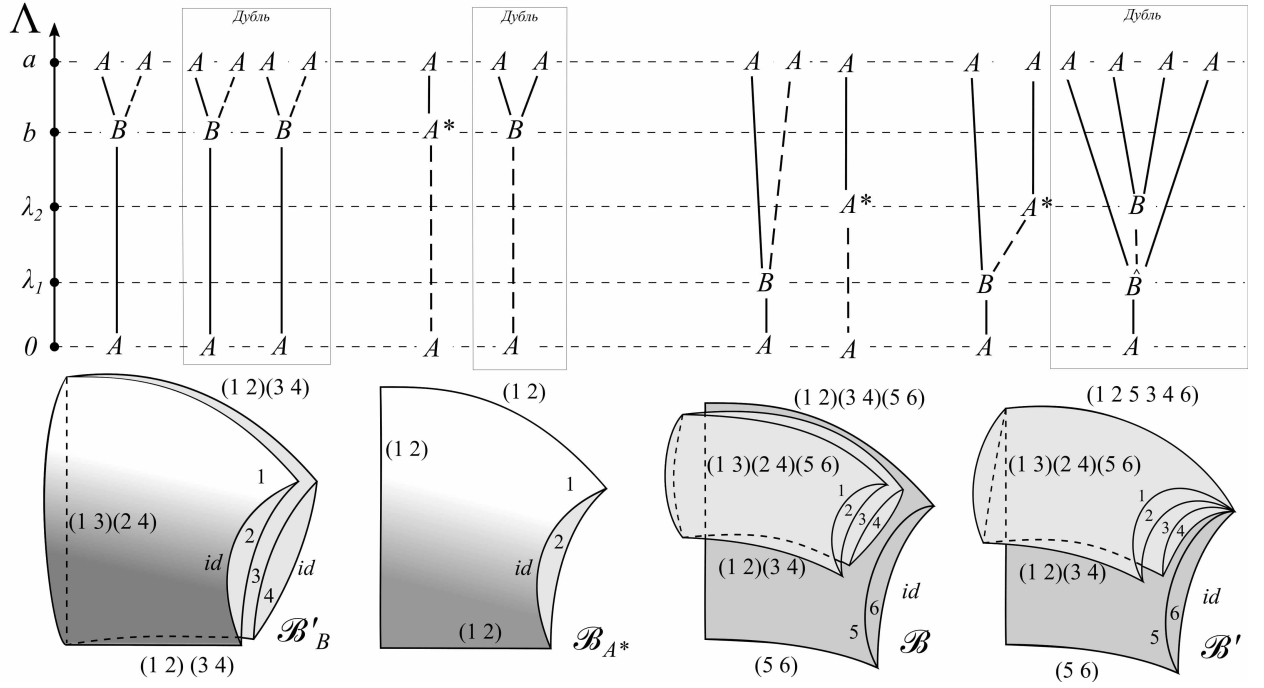


Рис. 35: Пример использования алгоритма 5 для склейки 3-атомов B и A^* по ребру.

алгоритме 3 склейки двух произвольных атомов без звездочек, но устроен сложнее.

Итак, выполним преобразования над книжкой $\mathcal{B}'_B$ из примера 5 и книжкой $\mathcal{B}_{A^*}$ из примера 2 так, чтобы в соответствующих им грубых молекулах атом B склеился с атомом A^* по ребру (см. рис. 35). При этом после этой склейки атом B будет находиться ниже атома A^* , верхнее пунктирное ребро атома B склеится с нижним пунктирным ребром атома A^* , а атомы A на других концах этих ребер пропадут.

Аналогично примеру 3 расположим атомы B и A^* на разных уровнях: λ_1 и λ_2 , таких что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b$. Чтобы атом B оказался на уровне λ_1 , а атом A^* — на уровне λ_2 , поменяем нижние границы листов у книжек $\mathcal{B}'_B$ и $\mathcal{B}_{A^*}$, а именно, сделаем их дугами эллипсов с соответствующими параметрами: λ_1 для B и λ_2 для A^* . Возьмем несвязное объединение этих книжек (операция несвязного объединения введена в опр. 32). В итоге получится биллиардная книжка $\mathcal{B}$, представленная на рис. 35. Заметим, что у нее сдвинулась нумерация на листах, отвечающих книжке $\mathcal{B}_{A^*}$: лист 1 перешел в лист 5, 2 в 6. Перестановки переписались в соответствии с этой перенумерацией: $\sigma[0] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $\sigma[\lambda_1] = (1\ 2)(3\ 4)$, $\sigma[\lambda_2] = (5\ 6)$, $\sigma[a] = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке $\mathcal{B}$ так, чтобы в грубой молекуле склеились нужные ребра. Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим также другую книжку $\hat{\mathcal{B}}$, которая получается из книжки $\mathcal{B}$, если положить левую перестановку $\sigma[a]$ тождественной. У нее на месте атомов возникают их дубли: на месте атома B — две копии атома B , на месте атома A^* — атом B .

Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Перестановка уровня $\Pi[\lambda]$ из опр. 31 выглядит так $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] = (1\ 2)(3\ 4)$. Рассмотрим разложение в независимые циклы композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \circ (1\ 2)(3\ 4) = (1)(2)(3)(4)(5\ 6)$. Лемма 4 в этом случае не применима к книжке $\mathcal{B}$, поскольку у нее слева нетождественная перестановка, но применима к дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$. Поэтому согласно этой лемме есть взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля на уровне $\Lambda = \lambda$ на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$ и независимыми циклами (1), (2), (3), (4) и (5 6). Каждому из торов Лиувилля на книжке $\mathcal{B}$ соответствуют один или два тора на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$. Как именно выглядит соответствие можно понять исходя из левой перестановки $\sigma[a]$ книжки $\mathcal{B}$. В нашем случае торы, соответствующие циклам (1) и (3), в

дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$ — это один тор в книжке $\mathcal{B}$, поскольку $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](3) = 1$, то есть эти циклы (торы) переходят друг в друга по инволюции. Аналогично, циклы (2) и (3) соответствуют одному тору в книжке $\mathcal{B}$. А цикл (5 6) переходит в себя же под действием перестановки $\sigma[a]$. Значит, цикл (5 6) (тор в дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$) соответствует одному тору в книжке $\mathcal{B}$. Для наглядности на рис. 30 изображена проекция этих торов на листы книжки $\mathcal{B}$.

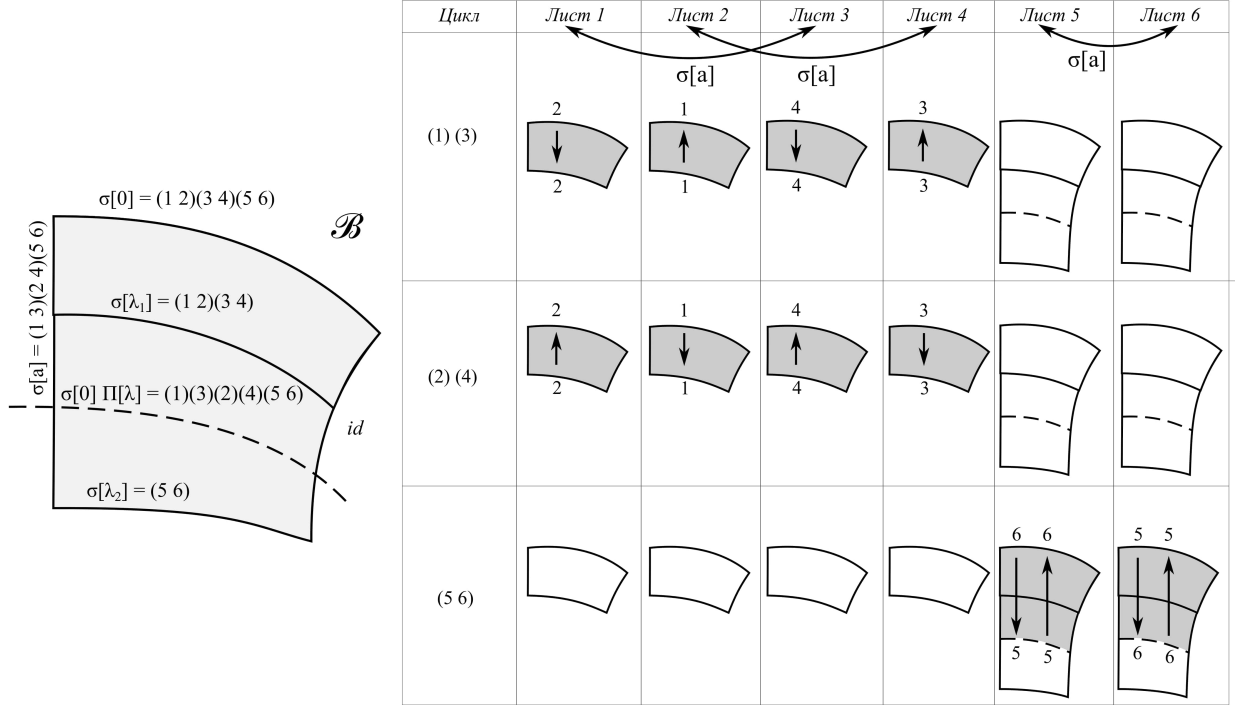


Рис. 36: Проекция торов Лиувилля на листы книжки $\mathcal{B}$. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу или паре циклов в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Итак, пунктирному ребру (тору) атома B на книжке $\mathcal{B}$ соответствует одно или два ребра (тора) на дубль-книжке $\hat{\mathcal{B}}$, а им, в свою очередь, некоторые циклы. Пусть ими будет пара циклов (1) и (3). Выберем из них произвольный цикл и фиксируем в нем любое число. Получим 1. Выполним аналогичные действия для атома A^* . Пусть пунктирному ребру атома A^* в книжке $\mathcal{B}$ соответствует один цикл (5 6). Фиксируем в нем произвольное число — 5. Итак, мы получили два числа 1 и 5. Рассмотрим также образы листов 1 и 5 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](5) = 6$. Заменяем верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (1\ 5) \circ (3\ 6) \circ \sigma[0] = (1\ 5) \circ (3\ 6) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) = (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)$. Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой (см. рис. 35). Получившаяся в результате новая книжка $\mathcal{B}'$ имеет нужную грубую молекулу.

Заметим, что на уровне $\Lambda = \lambda$ два тора, отвечающие циклам (1), (3) и (5 6), склеились. Действительно, если рассмотреть композицию $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = \sigma'[0] \circ \Pi[\lambda] = (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6) \circ (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 5\ 3\ 6)(2)(4)$, то можно увидеть, что циклы (1), (3) и (5 6) склеились в один цикл (1 5 3 6). На рис. 37 представлена проекция торов для новой книжки $\mathcal{B}'$. Видно, что новому циклу (1 5 3 6) соответствует движение материальной точки, являющееся объединением двух движений, соответствующих старым циклам (1), (3) и (5 6). Для других циклов движение материальной точки не меняется.

Продолжим моделировать грубую молекулу $\tilde{W}$, изображенную на рис. 26. Следующим шагом приклеим атом D_2 к грубой молекуле, сконструированной в предыдущем примере, а именно, приклеим его к атому A^* по ребру.

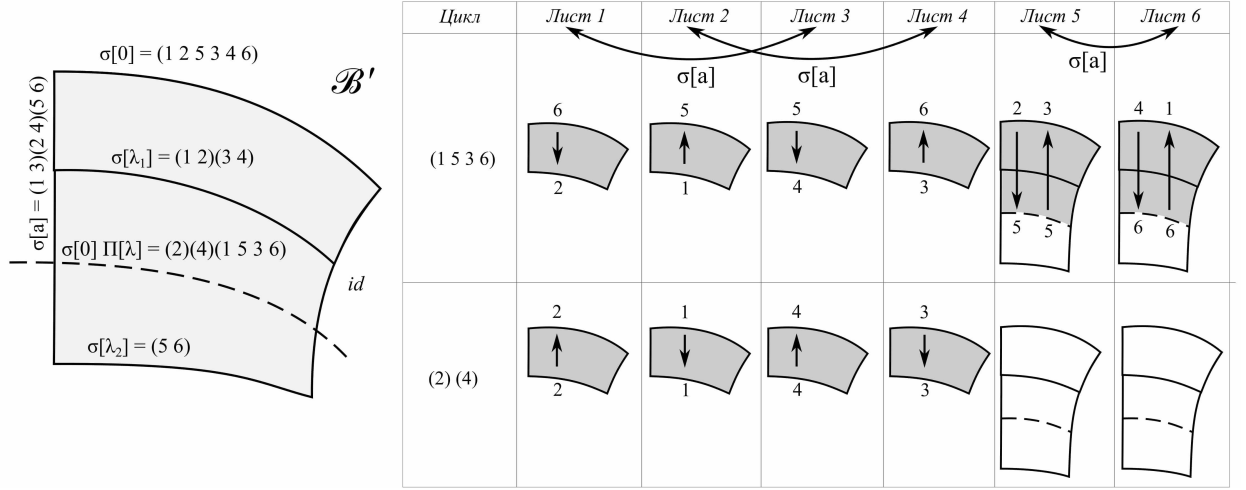


Рис. 37: Проекция торов Лиувилля на листы книжки $\mathcal{B}'$. Каждый из торов соответствует некоторому независимому циклу или паре циклов в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$.

Пример 7 (приклейки атома D_2 к атому A^* по ребру). Рассмотрим книжку $\mathcal{B}'$ из предыдущего примера и книжку $\mathcal{B}'_{D_2}$ из примера 5, моделирующую атом D_2 . Собираемся изменить эти две книжки, действуя по алгоритму 5 склейки двух произвольных атомов, со звездочками или без, так, чтобы атом D_2 приклеился к атому A^* по ребру (см. рис. 26).

Расположим атом D_2 на некотором уровне λ_3 , таком что $\lambda_2 < \lambda_3 < b$, то есть этот атом находится выше атомов B и A^* из грубой молекулы книжки $\mathcal{B}'$. Чтобы атом D_2 оказался на уровне λ_3 , поменяем нижние границы листов у книжки $\mathcal{B}'_{D_2}$, а именно, сделаем их дугой эллипса с параметром λ_3 . Возьмем несвязное объединение получившейся книжки и книжки $\mathcal{B}'$ (операция несвязного объединения введена в опр. 32). В итоге получится билиардная книжка $\mathcal{B}$ из 14 листов с перестановками:

$$\begin{aligned}\sigma[0] &= (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

Эта книжка имеет грубую молекулу W_1 на рис. 26. Изменим верхнюю перестановку $\sigma[0]$ в книжке $\mathcal{B}$ так, чтобы получилась грубая молекула W_2 . Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольное значение λ интеграла Λ , находящееся между атомом A^* и D_2 , то есть $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$. Тогда $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$. Значит,

$$\begin{aligned}\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6); \\ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5)(2)(3\ 6)(4)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14).\end{aligned}$$

Следующие пары циклов соответствуют некоторым торам на уровне λ интеграла Λ : $(1\ 5)(3\ 6)$, $(2)(4)$, $(7\ 8\ 9)(11\ 12\ 13)$ и $(10)(14)$. Пусть выделенным (пунктирным на молекуле W_1 на рис. 26) ребрам соответствуют пары циклов $(1\ 5)(3\ 6)$ и $(7\ 8\ 9)(11\ 12\ 13)$. Выберем произвольные числа в каждой из пар циклов — 1 и 7. Рассмотрим также образы листов 1 и 7 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](1) = 3$ и $\sigma[a](7) = 11$. Тогда верхняя перестановка записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 7)(3\ 11) \circ \sigma[0] = (1\ 7)(3\ 11) \circ (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6)(7\ 8\ 9)(10)(11\ 12\ 13)(14); \\ \sigma''[0] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14).\end{aligned}$$

Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой. Получившаяся в результате новая книжка $\mathcal{B}''$ имеет грубую молекулу W_2 из рис. 26.

Рассмотрим последний пример. В нем будет рассмотрен переход от грубой молекулы W_2 , полученной в предыдущем примере, к грубой молекуле W_3 , совпадающей с требуемой молекулой $\tilde{W}$ (см. рис. 26). Здесь также воспользуемся алгоритмом 5 и склеим атом B с атомом D_2 по ребру.

Пример 8 (склейки атома B с атомом D_2 по ребру). Рассмотрим книжку $\mathcal{B}''$ из предыдущего примера с перестановками:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

Эта книжка имеет грубую молекулу W_2 на рис. 26. Изменим верхнюю перестановку $\sigma''[0]$ так, чтобы получилась грубая молекула W_3 . Для этого выполним действия, описанные ниже.

Рассмотрим произвольное регулярное значение λ интеграла Λ , находящееся между атомом B и D_2 , то есть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3, \lambda \neq \lambda_2$. Тогда, если $\lambda < \lambda_2$, то $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] = (1\ 2)(3\ 4)$. Если $\lambda > \lambda_2$, то $\Pi[\lambda] = \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \lambda_2$. Ответ от этого выбора не будет зависеть, поскольку торы, которые соответствуют пунктирным ребрам, есть в том, и в другом случае. Эти торы будут соответствовать тем же циклам. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14) \circ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6); \\ \sigma''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)(2)(4)(10)(14).\end{aligned}$$

Следующие пары циклов соответствуют некоторым торам на уровне λ интеграла Λ : $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$, $(2)(4)$ и $(10)(14)$. Выделенным (пунктирным на молекуле W_2 на рис. 26) ребрам соответствуют пары циклов $(2)(4)$ и $(10)(14)$. Выберем произвольные числа в каждой из пар циклов — 2 и 14. Рассмотрим также образы листов 2 и 14 относительно инволюции $\sigma[a]$ — листы $\sigma[a](2) = 4$ и $\sigma[a](14) = 10$. Тогда верхняя перестановка записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] &= (2\ 14)(4\ 10) \circ \sigma''[0] = (2\ 14)(4\ 10) \circ (1\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)(10)(14); \\ \sigma'''[0] &= (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9).\end{aligned}$$

Поменяем верхнюю границу всех листов в соответствии с новой перестановкой. Получившаяся в результате новая книжка $\mathcal{B}'''$ имеет грубую молекулу $W_3 = \tilde{W}$ из рис. 26.

Итак, мы получили грубую молекулу $\tilde{W}$ последовательным применением алгоритма 5, в чем и состоит алгоритм 6 моделирования любой грубой молекулы. Заметим также, что данная книжка, вообще говоря, строится неоднозначно, поскольку номера в циклах можно выбирать произвольным образом. Однако сами циклы выбираются однозначно, поскольку они соответствуют ребрам на молекуле, которые фиксированы для заданной грубой молекулы.

Замечание 32. Проверим, что полученная книжка $\mathcal{B}'''$ имеет такое же количество торов на каждом регулярном уровне, что и грубая молекула $\tilde{W}$. Совпадение торов является необходимым (но не достаточным) условием того, что молекула для книжки $\mathcal{B}'''$ совпадает с $\tilde{W}$. Книжка $\mathcal{B}'''$ имеет следующие перестановки:

$$\begin{aligned}\sigma''[0] &= (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9), \\ \sigma[\lambda_1] &= (1\ 2)(3\ 4), \sigma[\lambda_2] = (5\ 6), \sigma[\lambda_3] = (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14), \\ \sigma[a] &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 11)(8\ 12)(9\ 13)(10\ 14).\end{aligned}$$

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $0 < \lambda < \lambda_1$. На этом уровне в грубой молекуле $\tilde{W}$ есть только один тор, который находится на ребре, соединяющем атомы A и B . Вычислим разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$.

$$\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] = \sigma'''[0] \circ id = (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9).$$

Получаем, что на дубле книжки $\mathcal{B}'''$ на этом уровне есть только один тор, который соответствует циклу $(1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)$. Он под действием инволюции $\sigma[a]$ переходит в себя же. Это и означает, что на книжке $\mathcal{B}'''$ на этом уровне — один тор, то есть количество торов совпадает.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. На этом уровне на грубой молекуле $\tilde{W}$ — два тора. Один находится на ребре, соединяющем атомы B и A^* , другой — на ребре, соединяющем атомы B и D_2 . Второй тор должен будет сохраниться и на уровне, находящемся между значениями λ_2 и λ_3 . Снова вычислим разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$.

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] = (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)(2\ 14)(4\ 10).\end{aligned}$$

Получаем, что на дубле книжки $\mathcal{B}'''$ на этом уровне есть три тора, которые соответствуют циклам $(1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)$, $(2\ 14)$ и $(4\ 10)$. Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 6\ 7\ 8\ 9)$ переходит в себя же, поэтому ему на книжке $\mathcal{B}'''$ соответствует тоже один тор, а цикл $(2\ 14)$ переходит в цикл $(4\ 10)$. Значит, этой паре циклов соответствует тоже один тор. В итоге получаем в книжке $\mathcal{B}'''$ два тора на этом уровне, что и требовалось.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$. На этом уровне на грубой молекуле $\tilde{W}$ — два тора. Один находится на ребре, соединяющем атомы A^* и D_2 , другой — на ребре, соединяющем атомы B и D_2 . Второй тор должен быть таким же, как и в предыдущем случае. Разложение в независимые циклы композиции $\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda]$ в этом случае выглядит так.

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] = (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ (5\ 6); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)(2\ 14)(4\ 10).\end{aligned}$$

Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)$ переходит в цикл $(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$, а цикл $(2\ 14)$ переходит в цикл $(4\ 10)$. Значит в книжке $\mathcal{B}'''$ на этом уровне есть два тора, соответствующие парам циклов $(1\ 5\ 7\ 8\ 9)(3\ 6\ 11\ 12\ 13)$ и $(2\ 14)(4\ 10)$. Пара циклов $(2\ 14)(4\ 10)$ такая же, как и в предыдущем случае. Значит, и тор, соответствующий ей, сохранился. Получили то, что требуется.

- Рассмотрим произвольный уровень λ , такой что $\lambda_3 < \lambda < a$. На этом уровне на грубой молекуле $\tilde{W}$ — два тора, находящиеся на ребрах соединяющих атомы D_2 и A .

$$\begin{aligned}\sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= \sigma'''[0] \circ \sigma[\lambda_1] \circ \sigma[\lambda_2] \circ \sigma[\lambda_3]; \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 14\ 2\ 5\ 11\ 12\ 13\ 3\ 10\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ (5\ 6) \circ (7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14); \\ \sigma'''[0] \circ \Pi[\lambda] &= (1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)(8)(12).\end{aligned}$$

Под действием инволюции $\sigma[a]$ цикл $(1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)$ переходит в цикл $(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)$, а цикл (8) переходит в цикл (12) . Значит в книжке $\mathcal{B}'''$ на этом уровне есть два тора, соответствующие парам циклов $(1\ 5\ 7\ 9\ 4\ 10)(3\ 6\ 11\ 13\ 2\ 14)$ и $(8)(12)$. Получили нужное число торов.

8 Доказательство корректности алгоритма моделирования любых грубых молекул

Для доказательства теоремы 5 докажем, что алгоритм 6 моделирования любых грубых молекул билиардными книжками класса **b** корректен. Разобьем доказательство на несколько лемм.

Лемма 5. Пусть дана билиардная книжка $\mathcal{B}$ класса **a**. Построим билиардную книжку $\mathcal{B}'$ из $\mathcal{B}$ заменой всех листов на листы типа B_0 с некоторым фиксированным параметром λ_1 эллипса, являющегося нижней границей. Тогда грубые молекулы, отвечающие книжкам $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, совпадут.

Доказательство. Обозначим через Q^3 и Q'^3 изоэнергетические многообразия билиардных книжек $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ соответственно. Предъявим явный гомеоморфизм $\varphi : [0, a] \rightarrow [0, a]$, такой, что уровень интеграла $\Lambda = \lambda$ будет гомеоморфен уровню $\Lambda' = \varphi(\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, a]$, где Λ — интеграл, отвечающий параметру квадрики, определенный на Q^3 , Λ' — на Q'^3 . Этот гомеоморфизм даст грубую эквивалентность систем (Q^3, Λ) и (Q'^3, Λ') , что эквивалентно совпадению грубых молекул по теореме 2.

Функцию φ зададим так, чтобы отрезок $[0, b]$ переходил в отрезок $[0, \lambda_1]$, отрезок $[b, a]$ переходил в отрезок $[\lambda_1, a]$ (см. рис. 38). Например, такое отображение можно задать следующей кусочно-линейной функцией:

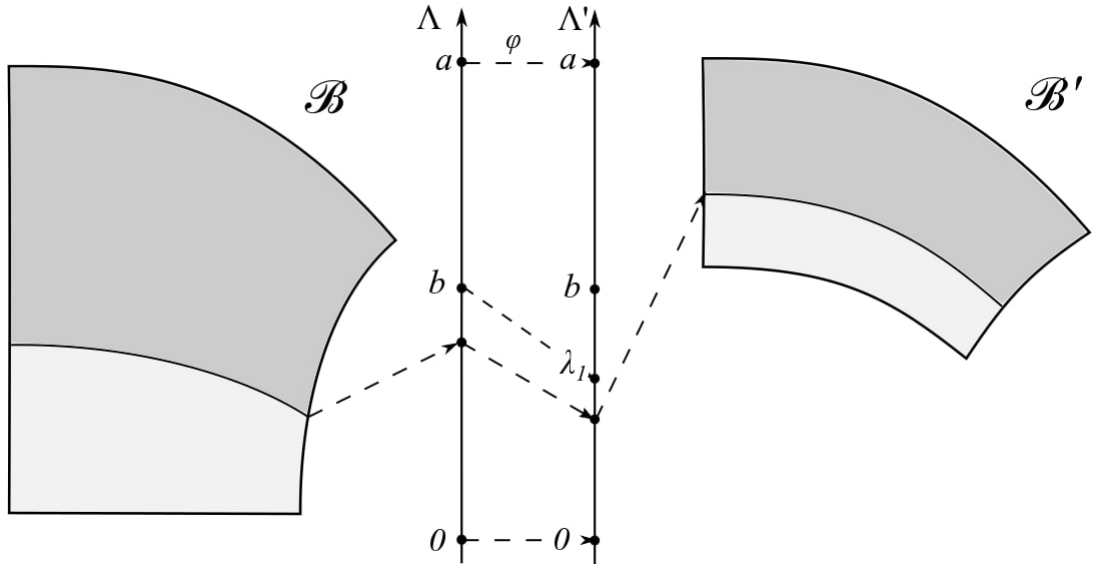


Рис. 38: Гомеоморфизм φ , отображающий слои изоэнергетического многообразия Q^3 в слои Q'^3 .

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{b} \lambda, & \text{если } \lambda \in [0, b]; \\ \lambda_1 + \frac{a - \lambda_1}{a - b} (\lambda - b), & \text{если } \lambda \in (b, a]. \end{cases}$$

В старой билиардной книжке $\mathcal{B}$ уровни интеграла являются критическими при $\Lambda = 0$, $\Lambda = b$, $\Lambda = a$ (см. рис. 38). Они переходят в уровни $\Lambda' = 0$, $\Lambda' = \lambda_1$, $\Lambda' = a$, которые также являются критическими в новой билиардной книжке $\mathcal{B}'$. Во всех случаях, отличных от критических, область возможного движения материальной точки (см. замечание 29) очевидно переходит в такую же область с теми же условиями склейки векторов. Критические уровни $\Lambda = 0$, $\Lambda = a$, $\Lambda' = 0$ и $\Lambda' = a$ соответствуют постепенному сжатию области возможного движения (до дуги), которое соответствует сжатию тором на окружности (атомам A). Эти слои также очевидно гомеоморфны.

Единственный нетривиальный уровень интеграла Λ — это $\Lambda = b$, отвечающий траекториям, сегменты которых лежат на прямых, содержащих хотя бы один из фокусов. Он переходит в уровень $\Lambda' = \lambda_1$, отвечающий траекториям, которые касаются эллипса с параметром λ_1 , являющегося нижней дугой границы. Рассмотрим окрестность этих уровней на каждом из листов. Будем изучать эти уровни интеграла с помощью метода, описанного в замечании 29: рассмотрим точку на билиардной книжке и каждый из не более 4-х векторов, соответствующих возможным направлениям на выбранном уровне, и изучим, как эти векторы между собой склеиваются, образуя двумерный слой.

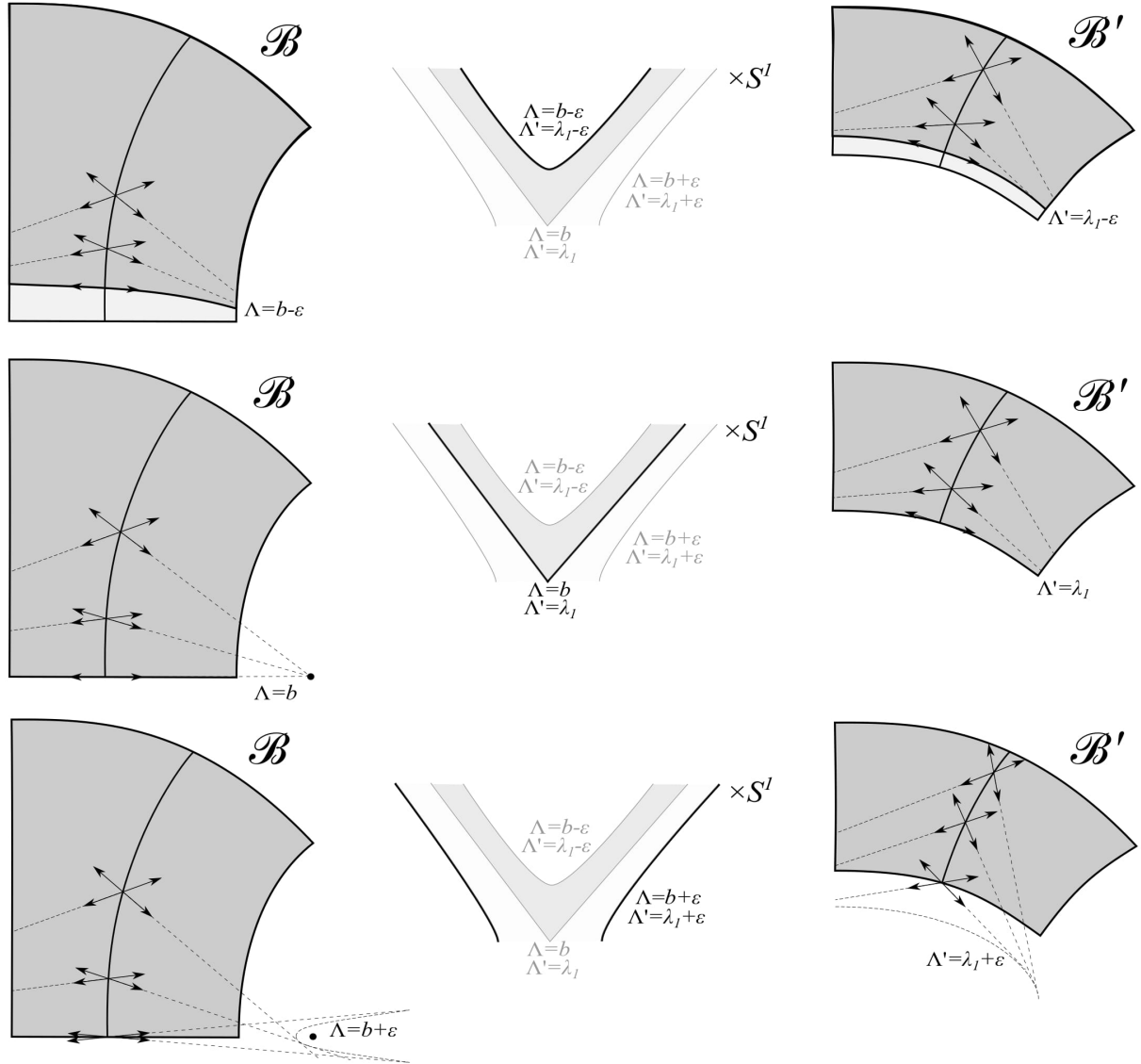


Рис. 39: Явный вид окрестности уровня $\Lambda = b$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 и уровня $\Lambda' = \lambda_1$ в Q'^3 .

В окрестности уровней $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$ удобно рассматривать не отдельно каждую точку на листе билиардной книжки, а семейство точек, лежащих на фиксированной гиперболе. Сравним эти семейства для произвольной гиперболы на уровнях $\Lambda = b - \epsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 - \epsilon$, $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$, $\Lambda = b + \epsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 + \epsilon$. Результат представлен на рис. 39. На этом рисунке видно, как векторы, направленные вверх и вниз, сближаются при движении вниз по гиперболе в каждом из случаев. В случаях $\Lambda = b - \epsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 - \epsilon$, $\Lambda = b$ и $\Lambda' = \lambda_1$ векторы, достигнув интегральной кривой (эллипса или фокальной прямой), склеиваются в один. В случаях $\Lambda = b + \epsilon$ и $\Lambda' = \lambda_1 + \epsilon$ эти векторы не успевают склеиться и переходят по закону отражения на другой лист. Видно, что получившиеся уровни

в старой и новой книжках (на левом и правом рисунках) гомеоморфны для каждого из листов. Эти уровни изображены в центре рис. 39. А поскольку в новой бильярдной книжке $\mathcal{B}'$ перестановки остались такими же, как и в старой книжке $\mathcal{B}$, то векторы склеиваются одинаково, и слои гомеоморфны. Лемма доказана. Более подробное доказательство можно прочесть в статье [32].

Заметим также, что в старой бильярдной книжке $\mathcal{B}$ класса **a** нет невыпуклых склеек, а в новой книжке $\mathcal{B}'$ класса **b** они появляются. Как уже говорилось в описании фазового пространства бильярдной книжки (см. случай 2 касания кривой границы), в окрестности невыпуклых склеек есть траектории, продолжение которых неопределено в некоторых точках. В нашем случае это — траектории, которые касаются эллипса с параметром λ_1 . Но при этом эти точки определены на фазовом пространстве, а следовательно, на изоэнергетическом многообразии и слоях. Более того, все такие точки лежат на одном уровне — уровне интеграла $\Lambda' = \lambda_1$, поскольку продолжение траектории невозможно определить в момент касания эллипса с параметром λ_1 . $\square$

Сформулируем лемму в обозначениях алгоритма 3.

Лемма 6. (главная)

Построенная в алгоритме 3 новая перестановка $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ задает следующую топологическую перестройку грубой молекулы, содержащей два седловых атома P и Q без звездочек, построенных по алгоритму 1. А именно, исчезает ребро, соединяющее атом P с некоторым максимальным атомом A , и ребро, соединяющее атом Q с некоторым минимальным атомом A . Вместо них появляется новое ребро, соединяющее атомы P и Q (см. рис. 40, 41).

Доказательство. Напомним, что атом P находится на уровне λ_1 , атом Q на уровне λ_2 , и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < b < a$. Рассмотрим отдельно, как преобразуется грубая молекула на регулярных уровнях интеграла в каждом из 3-х возможных случаев:

1. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то есть уровень, находящийся между уровнями, на которых лежат атомы P и Q ;
2. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda < \lambda_1$, то есть уровень, находящийся ниже уровня, на котором лежит атом Q ;
3. регулярный уровень интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda > \lambda_2$, то есть уровень, находящийся выше уровня, на котором лежит атом P .

Регулярные уровни можно изучать в терминах перестановок, поскольку к ним применима лемма 4. Схематически изменение слоев представлено на рис. 40, 41.

Рассмотрим первый случай, соответствующий регулярному уровню интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Согласно лемме 4 в новой бильярдной книжке $\mathcal{B}'$ на этом уровне есть взаимно-однозначное соответствие между двумерными торами Лиувилля и независимыми циклами в разложении композиции $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda]$, где $\Pi'[\lambda]$ — перестановка уровня из опр. 31 в новой бильярдной книжке $\mathcal{B}'$. Заметим, что в новой книжке $\mathcal{B}'$ поменялась только перестановка $\sigma[0]$. Значит, перестановка уровня $\Pi'[\lambda]$ в новой бильярдной книжке $\mathcal{B}'$ совпадает с перестановкой уровня $\Pi[\lambda]$ в старой бильярдной книжке $\mathcal{B}$. Из этого следует, что $\sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$. Заметим, что в старой бильярдной книжке $\mathcal{B}$ тоже есть взаимно-однозначное соответствие между торами Лиувилля на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ и независимыми циклами в разложении перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$. Изучим изменение уровня при переходе от старой книжки к новой, изучая, как меняются циклы в разложении композиции при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$.

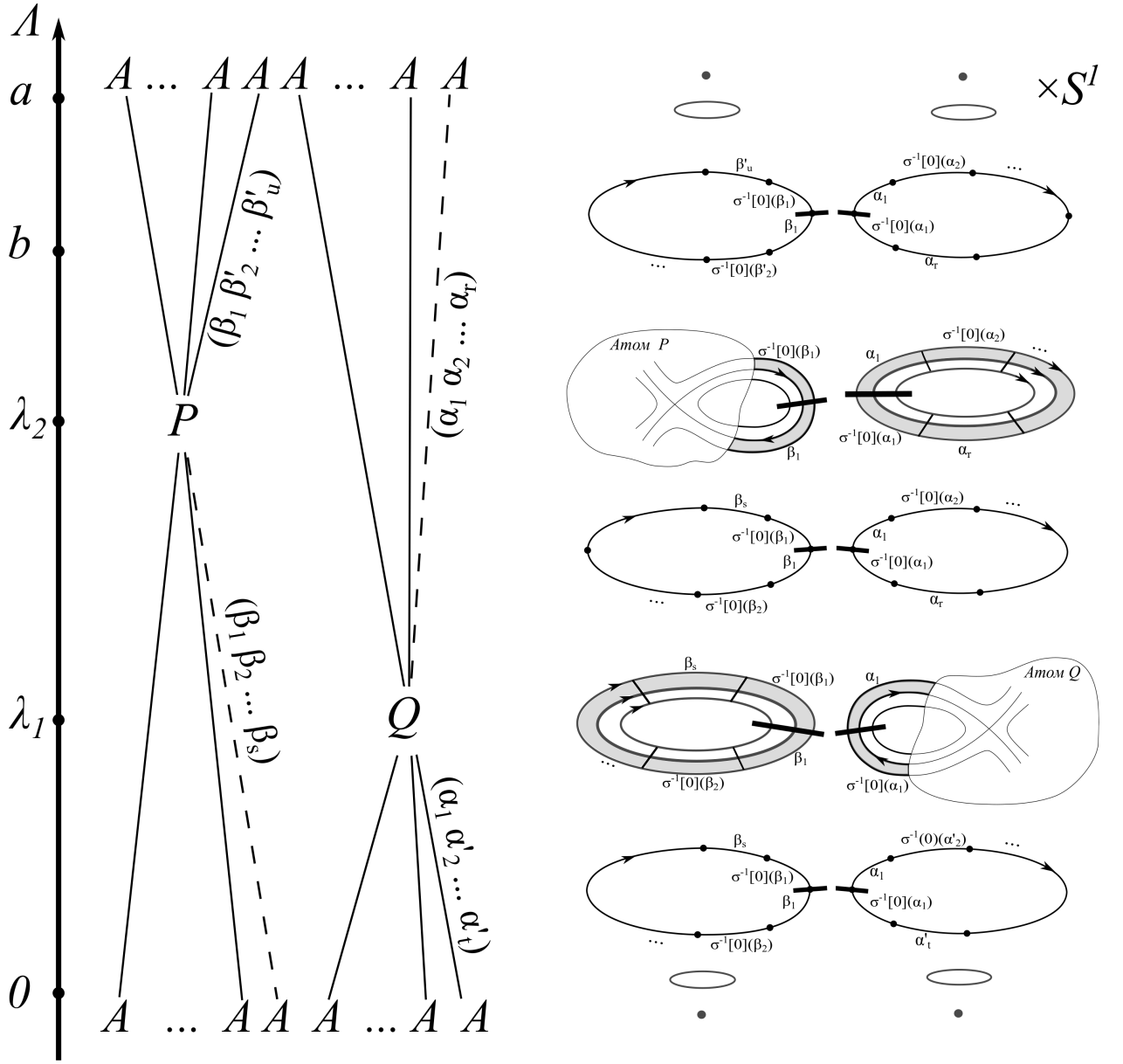


Рис. 40: Описание слоев старой бильярдной книжки $\mathcal{B}$ с верхней перестановкой $\sigma[0]$.

Рассмотрим циклы $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ в разложении композиции $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов. Этим циклам соответствуют ребра (торы) в старой грубой молекуле, обозначенные пунктиром на рис. 40. Они соединяют атом Q с некоторым максимальным атомом A и атом P с некоторым минимальным атомом P соответственно. Эти ребра мы собирались клеить на шаге 4 алгоритма 3. Итак, перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ можно представить в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1,$$

где S_1 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1; \\ \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_1. \end{aligned}$$

Как мы видим, на этом уровне интеграла два тора, соответствующие циклам $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, склеились в один, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$. Тор стал более “длинным”, поскольку два тора разрезались по циклу, и полученные цилиндры

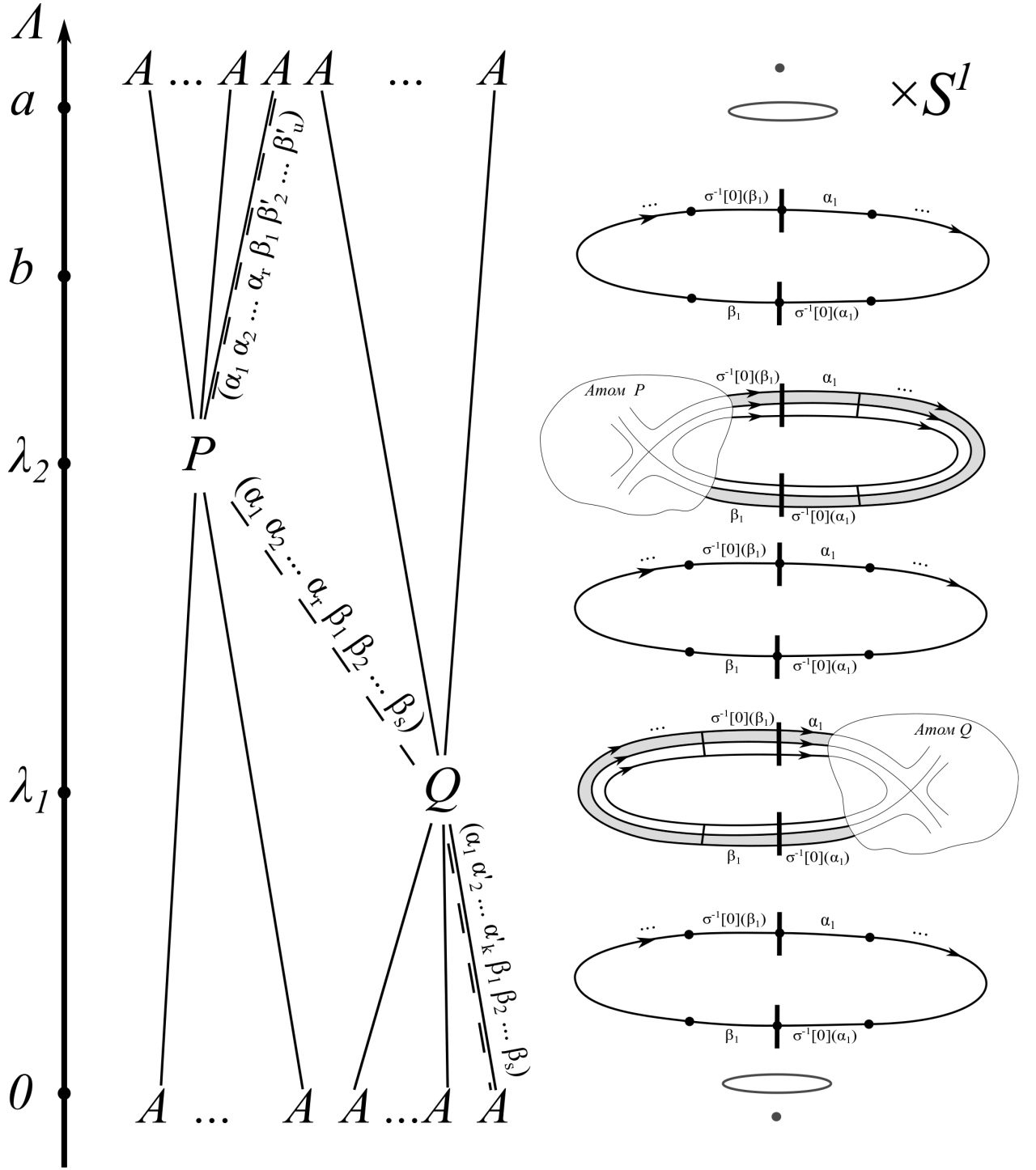


Рис. 41: Описание слоев новой билиардной книжки $\mathcal{B}'$ с верхней перестановкой $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$.

склеились. Значит, в грубой молекуле на этом уровне исчезнут два пунктирных ребра, соединяющие атом P с атомом A минимума и атом Q с атомом A максимума, и появится новое пунктирное ребро (см. рис. 41). Чтобы изучить, какие атомы оно соединяет, нужно изучить окрестность критических уровней. Это мы сделаем позже. Все остальные ребра на этом уровне изменение перестановки $\sigma[0]$ не затронет.

Рассмотрим второй случай, который соответствует уровню, находящемуся ниже уровня, на котором лежит атом Q . Здесь, как и в предыдущем случае, поскольку уровень не критический, изменение уровня можно описать в терминах перестановок. В грубой молекуле старой билиардной книжки $\mathcal{B}$ рассматриваемое пунктирное ребро,

которое соединено с атомом P , соединяется с другой стороны с атомом A минимума. Значит, тор, соответствующий этому ребру, не перестраивается ни через какой критический уровень, находящийся ниже уровня атома P . Поэтому в разложении перестановки $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ в произведение независимых циклов, где $\lambda < \lambda_1$, есть цикл $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, такой же, как и на уровне между λ_1 и λ_2 . Кроме того, в этом разложении есть некоторый цикл, который содержит число α_1 . Пусть этим циклом является цикл $(\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t)$, где $\alpha'_2, \dots, \alpha'_t$ — оставшиеся элементы этого цикла. Итак, перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ можно представить в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2,$$

где S_2 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda < \lambda_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2; \\ \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s) \circ S_2. \end{aligned}$$

То есть тор, который отвечал ребру соединяющему атом P с атомом A минимума, на этом уровне приклеился к уже существующему тору. Значит, в грубой молекуле на этом уровне исчезнет пунктирное ребро, соединяющее атом P с атомом A минимума (то же самое ребро, что и то, которое мы рассматривали для уровня λ , т.ч. $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$). Все остальные ребра на этом уровне изменение перестановки $\sigma[0]$ не затронет (см. рис. 40, 41).

Третий случай аналогичен второму. Здесь останется неизменным цикл $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$, но будет какой-то другой цикл, содержащий номер β_1 . Пусть этим циклом является цикл $(\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u)$, где $\beta'_2, \dots, \beta'_u$ — оставшиеся элементы этого цикла. Снова перестановку $\sigma[0] \circ \Pi[\lambda]$ представим в виде композиции

$$\sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3,$$

где S_3 — произведение оставшихся независимых циклов, и $\lambda > \lambda_2$. Тогда исчезновение ребра происходит в результате объединения двух циклов $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u)$. В результате получается следующая перестановка

$$\begin{aligned} \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0] \circ \Pi[\lambda] = (\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \circ (\beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3; \\ \sigma'[0] \circ \Pi'[\lambda] &= (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_1 \beta'_2 \dots \beta'_u) \circ S_3. \end{aligned}$$

Из получившегося разложения следует, что в грубой молекуле на этом уровне исчезнет пунктирное ребро, соединяющее атом Q с атомом A максимума. Все остальные ребра на этом уровне не изменятся (см. рис. 40, 41).

Теперь рассмотрим, как преобразуется грубая молекула на *критических* уровнях интеграла в каждом из 3-х возможных случаев:

1. критический уровень интеграла $\Lambda = \lambda_1$, такой, на котором лежит атом Q ;
2. критический уровень интеграла $\Lambda = \lambda_2$, такой, на котором лежит атом P ;
3. критические уровни $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$, на которых лежат атомы A минимума и максимума.

Исследуем первый случай, соответствующий критическому уровню интеграла $\Lambda = \lambda_1$. В старой биллиардной книжке $\mathcal{B}$ близкие к нему регулярные уровни $\Lambda = \lambda_1 - \varepsilon$ и $\Lambda = \lambda_1 + \varepsilon$ содержали тор, соответствующий циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, лежащий на “регулярном” пунктирном ребре, не содержащем перестроек на уровне $\Lambda = \lambda_1$. То есть по

непрерывности на этом ребре тоже расположен регулярный тор. Покажем, как этот регулярный тор приклеится к критическому уровню атома Q . В результате атом Q не изменится, а выбранный регулярный тор исчезнет.

Рассмотрим любую билиардную траекторию на этом торе. Согласно лемме 4, числа в цикле $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ соответствуют номерам листов, по которым эта траектория идет вниз на билиардной книжке $\mathcal{B}$. А именно, траектория идет вниз по листу β_1 , потом вверх по листу $\Pi[\lambda](\beta_1)$, вниз по листу β_2 , вверх по $\Pi[\lambda](\beta_2)$ и т.д. С листа $\Pi[\lambda](\beta_s)$ траектория перейдет снова на лист β_1 и будет идти по нему вниз на билиардной книжке $\mathcal{B}$.

Если переопределить перестановку $\sigma'[0] = (\alpha_1, \beta_1) \circ \sigma[0]$ на верхней границе, то траектория после удара от верхней границы перейдет с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист α_1 вместо β_1 , а с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ — на лист β_1 вместо α_1 . То есть, если рассмотреть окрестность уровня $\Lambda = \lambda_1$, то он преобразуется, как показано на рис. 40, 41. Видим, что на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$ при изменении перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\alpha_1, \beta_1) \circ \sigma[0]$ связная компонента тора, отвечающая циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, приклеивается к другой связной компоненте, содержащей движение вниз по листу α_1 . Эта связная компонента отвечает атому Q , поскольку тор, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и содержащий движение вниз по листу α_1 , перестраивается на этом уровне через атом Q . Приклейка тора удлиняет “ленту” на атоме Q , поэтому атом Q не изменится.

Опишем эту операцию на языке двумерных атомов. Атом Q является двумерной поверхностью, состоящей из “координатных крестов” и, соединяющих их концы, двумерных “лент”. Взятый нами регулярный тор на уровне $\Lambda = \lambda_1$ изображается двумерным кольцом. Мы разрезаем это кольцо и получаем “прямоугольник”. Далее, мы разрезаем одну из лент 2-атома Q и вклеиваем в атом Q “прямоугольник”, соединяя его концы с границами разреза, сделанными на атоме Q . В результате, атом Q , очевидно, не изменился (заменился на гомеоморфный), а выбранный выше регулярный тор исчез.

Обратим внимание, что мы пока не доказали, что новый тор на регулярном уровне $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ пунктирного ребра инцидентен атому Q на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$. Докажем этот факт. Выше мы доказали, что регулярный тор, отвечающий циклу $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$ и находившийся на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$, приклеился к атому Q . Кроме того старое пунктирное ребро, которое соответствовало циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$, инцидентно атому Q . Отсюда вытекает, что новое пунктирное ребро, склеенное из двух пунктирных ребер, которые отвечали циклам $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s)$, также инцидентно атому Q (см. рис. 40, 41).

Второй случай аналогичен первому. Только теперь тор, соответствующий циклу $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s)$, приклеивается к атому P . Это также дает, что новое пунктирное ребро, отвечающее тору на регулярном уровне $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$, инцидентно атому P на критическом уровне $\Lambda = \lambda_2$.

Рассмотрим третий случай. Атомы A описывают стягивание торов на окружность с повышением или понижением уровня интеграла. Поэтому по непрерывности получаем, что склеивание двух торов в один при приближении к критическому уровню соответствует склейке двух критических окружностей в одну (см. рис. 40, 41).

Итак, как мы видим, в каждом из указанных случаев изменение слоев интеграла Λ при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ отражает необходимую нам склейку двух атомов по ребру, описанную в формулировке леммы 6. Главная лемма 6 доказана. $\square$

Сформулируем лемму в обозначениях алгоритма 5.

Лемма 7. Построенная в алгоритме 5 новая перестановка $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ задает следующую топологическую перестройку грубой молекулы, содержащей любые два седловых атома P и Q (со звездочками или без), реализованных с помощью книжсек класса $\mathbf{a}$ по общему алгоритму 4. А именно, исчезает ребро, соединяющее атом P с

некоторым максимальным атомом A , и ребро, соединяющее атом Q с некоторым минимальным атомом A . В новой грубой молекуле вместо них появляется новое ребро, соединяющее атомы P и Q (рисунок аналогичен рис. 40, 41).

Доказательство. Биллиардная книжка $\mathcal{B}$, рассматриваемая в этой лемме, отличается от книжки в предыдущей лемме 6 тем, что ранее перестановка $\sigma[a]$ слева была тождественной, а теперь она является инволюцией, которая не содержит элементов переходящих в себя же. Эта инволюция задает симметрию на листах книжки и на слоях интеграла Λ на изоэнергетическом многообразии Q^3 . Если положить левую перестановку $\sigma[a]$ тождественной, то получится “дубль-книжка” $\hat{\mathcal{B}}$, в которой все слои будут дублями для слоев, соответствующих книжке $\mathcal{B}$. Это вытекает из построения биллиардной книжки $\mathcal{B}$. Для “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$ можно применить лемму 6. Это означает, что слои в дубль-книжке изменяются по правилу, описанному в этой лемме 6. Поэтому, чтобы изучить, как меняются слои в биллиардной книжке $\mathcal{B}$, мы перейдем к слоям в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, посмотрим, как меняются слои в ней, и перейдем обратно к слоям в книжке $\mathcal{B}$.

Опишем подробнее, как преобразуются слои при переходе от книжки $\mathcal{B}$ к “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ и обратно. Этот процесс уже описан в п. 2 явной конструкции 3-атомов. Опишем его аналог для книжек $\mathcal{B}$ и $\hat{\mathcal{B}}$. Итак, при переходе от биллиардной книжки $\mathcal{B}$ к “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ слой становится тривиальным расслоением $X \times S^1$ со слоем окружность S^1 . На базе X этого расслоения можно ввести инволюцию τ , соответствующую инволюции $\sigma[a]$ на листах книжки. Этот слой вместе с инволюцией τ является дублем для слоя книжки $\mathcal{B}$. Это означает, что, если проделать следующие операции, то получится слой в исходной книжке $\mathcal{B}$. Рассмотрим цилиндр $X \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$ для каждого $x \in X$. Получаем некоторый двумерный слой, который является слоем в исходной книжке $\mathcal{B}$. Для торов дублем может быть один или два тора с инволюцией τ , переводящей тор в себя же или один тор в другой соответственно (см. замечание 25 о возможных дублях двумерных торов). Для критических уровней интеграла Λ рассматривается их окрестность — атомы. Дублем для атома является некоторый атом без звездочек с инволюцией τ на нем (см. примеры дублей в замечании 26 о явном конструировании дублей для атомов).

Рассмотрим слои в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ по аналогии с предыдущей леммой 6. Во всех случаях числа α_1, β_1 выбирались так же, как и в алгоритме 3 склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру. Поэтому они так же, как и в предыдущей лемме 6, соответствуют номерам листов, по которым траектории, принадлежащие выбранным торам, идут вниз на биллиардной книжке. Значит, эти траектории отразились от верхней границу и перешли по перестановке $\sigma[0]$ на листы α_1, β_1 с листов $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1), \sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ соответственно. В окрестности листов с номерами $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ происходит то же самое.

Изучим детальнее переклейки регулярных слоев при замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Ранее в лемме 6 на регулярных уровнях два тора склеивались в один. Теперь тору на регулярном уровне интеграла Λ биллиардной книжки $\mathcal{B}$ может соответствовать как один, так и два тора на этом же уровне в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$. Поэтому при склейке двух торов в биллиардной книжке $\mathcal{B}$ возникает три случая, изображенных на рис. 42:

1. каждому из торов, которые должны быть склеены, соответствует два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$;
2. одному из тех торов, что должны быть склеены, соответствует два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, другому — один;

3. каждому из торов, которые должны быть склеены, соответствует один тор на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$.

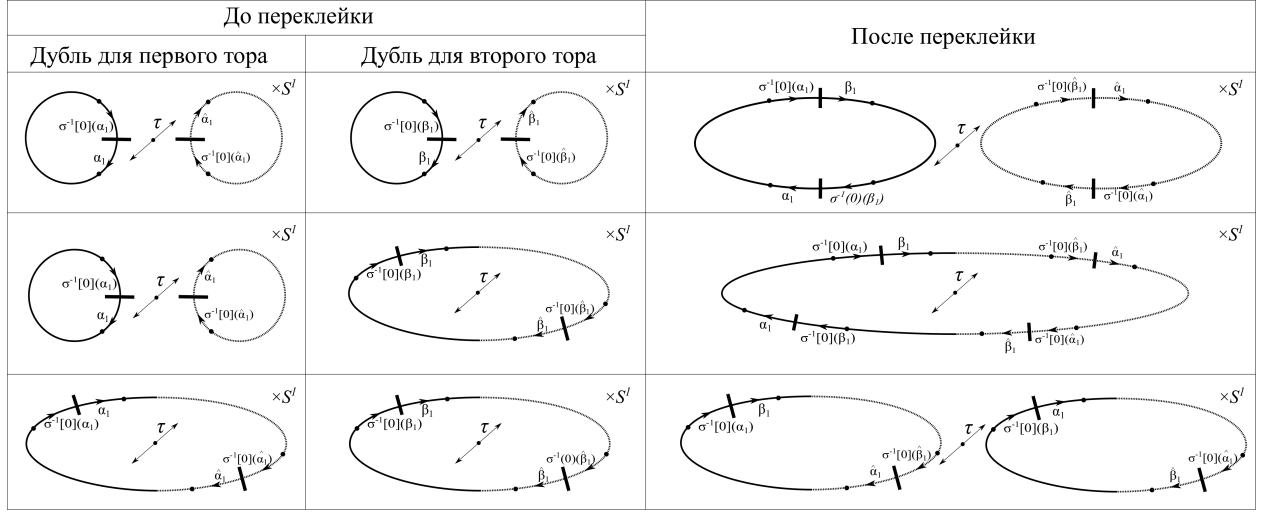


Рис. 42: Описание переклейки регулярных слоев биллиардной книжки $\hat{\mathcal{B}}$ при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Инволюция τ на дублях условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия.

Инволюция τ на рис. 42 условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия. При этом надо иметь ввиду, что на самих слоях она не обязана быть центральной симметрией. Поскольку новая перестановка $\sigma'[0]$ является произведением старой $\sigma[0]$ на две транспозиции $(\alpha_1 \beta_1)$ и $(\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1)$, а не одну, как ранее, то теперь в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$ будет две переклейки, а не одна. Как видно из рис. 42, после этих переклеек получается слой, который инволюция τ снова уважает. Кроме того, во всех случаях получившийся слой и инволюция τ являются дублем для нового тора в новой биллиардной книжке $\mathcal{B}'$. То есть, если надстроить над получившемся дублем цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , получится ровно один новый тор вместо двух старых.

Аналогично можно рассмотреть переклейку критического уровня $\Lambda = \lambda_1$, на котором находится атом Q . Напомним, что 2-атомы состоят из крестов и “лент”, соединяющих их концы (см. теорему 3). Трехмерные атомы без звездочек являются тривиальным расслоением над двумерными атомами со слоем окружность. Поэтому они тоже могут быть представлены в виде крестов и “лент”, умноженных на окружность. Для краткости в трехмерных атомах без звездочек мы также будем говорить в терминах крестов и “лент” без упоминания того, что они умножены на окружность.

Ранее в лемме 6 регулярный тор приклеивался к атому Q , удлиняя “ленту” на атоме. Благодаря этому тор на критическом уровне исчезал, а атом Q не менялся. Теперь регулярному тору в биллиардной книжке $\mathcal{B}$ может соответствовать один или два тора в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, а на месте атома Q возникает его дубль $\hat{Q}$. При этом неизвестно, какой из многих вариантов дублей для фиксированного атома Q возникнет в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$. После двух переклеек слоя в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, соответствующих замене перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0]$, дубль $\hat{Q}$ атома Q может даже замениться на другой дубль. Важно, что при этом получится дубль, отвечающий тому же самому атому Q (напомним, что одному атому могут отвечать разные дубли). Итак, есть два варианта переклейки, изображенных на рис. 43:

1. регулярному тору, который должен быть приклеен к атому Q , соответствуют два тора на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$;

2. регулярному тору, который должен быть приклеен к атому Q , соответствует один тор на этом же уровне интеграла Λ в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$.

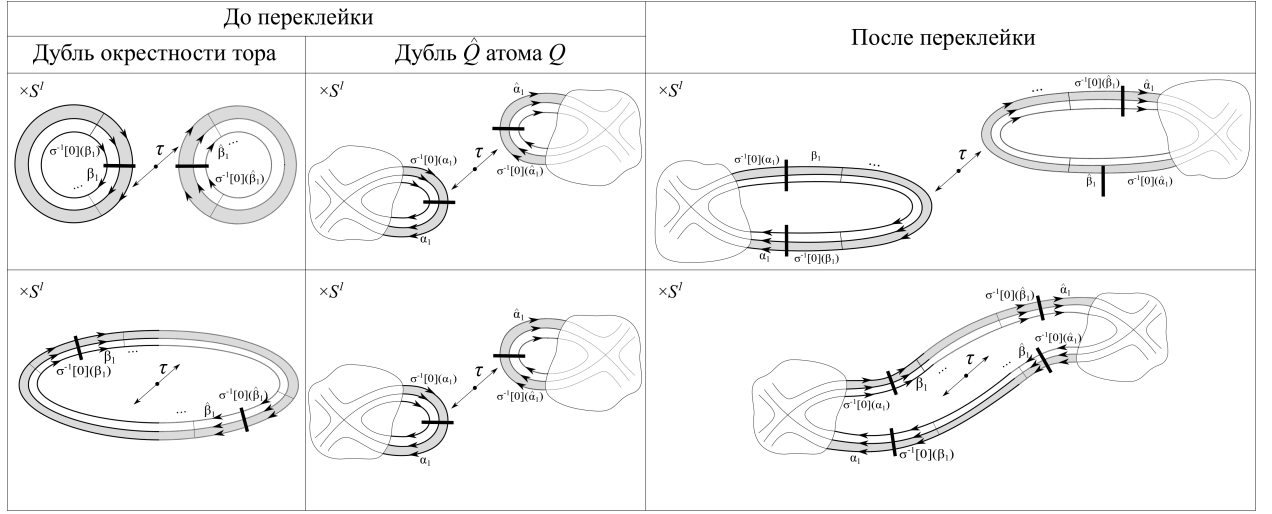


Рис. 43: Описание переклейки критического уровня $\Lambda = \lambda_1$ билиардной книжки $\hat{\mathcal{B}}$ при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Инволюция τ на дублях условно в целях наглядности представлена как центральная симметрия.

Заметим, что на рис. 43 дубль $\hat{Q}$ атома Q представлен схематически и только в окрестности листов с номерами $\alpha_1, \hat{\alpha}_1$. Эта окрестность на дубле $\hat{Q}$ выделена толстыми линиями. Остальная часть дубля $\hat{Q}$ может быть склеена между собой как угодно. В частности, компоненты, отвечающие окрестности листа α_1 и окрестности листа $\hat{\alpha}_1$, могут быть соединены “лентами”. При переклейке дубли меняются только в окрестности этих листов. То есть операция локальна, и остальная часть дубля останется неизменной. Поэтому достаточно проследить только за изменением этой окрестности.

Из рис. 43 видно, что в первом случае так же, как и в лемме 6, на уровне интеграла Λ “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$ регулярные торы вклеиваются в дубль $\hat{Q}$. При этом оба регулярных тора исчезают, а “ленты” на дубле $\hat{Q}$ удлиняются, заменяя дубль на ему гомеоморфный. Из этого получается, что в новой билиардной книжке $\mathcal{B}'$ атом Q останется тем же, а регулярный тор исчезнет.

Во втором случае дубль меняется. Изменение представлено на рис. 43. В этом случае “ленты” на дубле $\hat{Q}$ не только удлиняются, но и переклеиваются. При этом две несвязные компоненты могут объединиться, или наоборот, связная компонента может распасться. Но заметим, что если надстроить над получившемся дублем цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , то получится тот же атом Q , что и раньше. В окрестности листов $\alpha_1, \hat{\alpha}_1$ этот факт виден из рис. 43, а в оставшейся части дубля ничего не менялось.

Итак, как мы видим, в обоих случаях регулярный тор на критическом уровне $\Lambda = \lambda_1$ исчез, а атом Q заменился на гомеоморфный. Критический уровень $\Lambda = \lambda_2$, на котором лежит атом P , преобразуется аналогично.

Осталось рассмотреть критические уровни $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$, на которых лежат атомы A минимума и максимума соответственно. Атомы A описывают стягивание торов на окружность с повышением или понижением уровня интеграла. Поэтому по непрерывности получаем, что склеивание двух торов в один при приближении к критическому уровню соответствует склейке двух 3-атомов A в один.

Таким образом, получаем, что в билиардной книжке $\mathcal{B}$ при замене перестановки $\sigma[0]$ на перестановку $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$ на слоях произойдут следующие

изменения: на регулярных уровнях интеграла Λ два тора склеятся в один, на критических $\Lambda = \lambda_1$ и $\Lambda = \lambda_2$ регулярный тор приклеится к соответствующему атому. Конкретный выбор торов, которые будут склеены, такой же, как и в предыдущей лемме 6. Значит, грубая молекула бильярдной книжки $\mathcal{B}$ изменится так же, как и в предыдущей лемме (см. рис. 40, 41). Лемма 7 доказана. $\square$

Лемма 8. Пусть дана бильярдная книжка $\mathcal{B}$ на любом этапе алгоритма 6 моделирования грубой молекулы. Выберем на грубой молекуле этой бильярдной книжки пару ребер: одно ребро соединяет произвольный седловой атом Q с некоторым максимальным атомом A , другое — произвольный седловой атом P с некоторым минимальным атомом A , причем $\tilde{\Lambda}(Q) < \tilde{\Lambda}(P)$. Тогда после выполнения шагов 3-6 алгоритма 5 склейки двух произвольных седловых атомов по выбранным ребрам получится новая бильярдная книжка $\mathcal{B}'$. При переходе к новой грубой молекуле эта пара ребер исходной грубой молекулы склеится. В результате исчезнут эти выбранные ребра и появится новое, соединяющее атомы P и Q на новой грубой молекуле. Описанная операция локальна, то есть оставшаяся часть исходной грубой молекулы изменения не затронут.

Доказательство. Рассмотрим, как меняются уровни интеграла $\Lambda = \lambda$, где $0 < \lambda < \tilde{\Lambda}(P)$. Эти уровни находятся ниже атома P . Поскольку грубая молекула бильярдной книжки $\mathcal{B}$ может содержать более, чем два седловых атома, то среди этих уровней может встретиться любое число критических. Поэтому на этих слоях сфокусируемся на регулярном торе, который соответствует выбранному ребру, соединяющему атом P с минимальным атомом A . Изучим, как этот регулярный тор приклеивается к другим компонентам уровня интеграла $\Lambda = \lambda$.

Здесь, как и в предыдущей лемме 7, перейдем к слоям в “дубль-книжке” $\hat{\mathcal{B}}$, посмотрим, как меняются слои в ней, и перейдем обратно к слоям в книжке $\mathcal{B}$. Напомним, что “дубль-книжка” $\hat{\mathcal{B}}$ получается из книжки $\mathcal{B}$ заменой перестановки слева на тождественную. При этом все слои на уровне интеграла Λ упрощаются до тривиального расслоения $X \times S^1$ со слоем окружность S^1 над базой X , которая является дублем для соответствующих слоев книжки $\mathcal{B}$.

Итак, этому выделенному регулярному тору на слоях книжки $\mathcal{B}$ соответствует один или два тора на слоях “дубль-книжки” $\hat{\mathcal{B}}$. Эти один или два тора приклеются к некоторой компоненте $\hat{C}$ уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ независимо от того, является ли этот уровень критическим или нет. Эта компонента может быть дублем для некоторого атома или тора. Изображение этой переклейки аналогично показанному выше на рис. 43. Отличие состоит в том, что ранее регулярный тор приклеивался к дублю $\hat{Q}$ атома Q , а теперь здесь на месте дубля $\hat{Q}$ — некоторая компонента $\hat{C}$ уровня интеграла Λ . Но из аналога этого рисунка также следует, что в окрестности уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ выбранные один или два тора исчезнут, а компонента уровня $\hat{C}$ заменится на компоненту $\hat{C}'$. Получившаяся компонента уровня $\hat{C}'$ может отличаться от старой компоненты $\hat{C}$. Однако, если над компонентами $\hat{C}$ и $\hat{C}'$ надстроить цилиндр и склеить его основания по инволюции τ , то для компонент $\hat{C}$ и $\hat{C}'$ получится одно и то же. Таким образом, на уровне интеграла $\Lambda = \lambda$ в книжке $\mathcal{B}$ выделенный регулярный тор исчезнет, а оставшиеся слои не изменятся (заменятся на гомеоморфные). Иными словами, в старой грубой молекуле выделенное ребро, соединяющее атом P с минимальным атомом A , исчезнет, а оставшаяся часть грубой молекулы не изменится.

Точно также на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\tilde{\Lambda}(Q) < \lambda < a$ в старой грубой молекуле выделенное ребро, соединяющее атом Q с максимальным атомом A , исчезнет, а оставшаяся часть грубой молекулы не изменится.

Посередине, на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda$, где $\tilde{\Lambda}(Q) < \lambda < \tilde{\Lambda}(P)$ два регулярных тора, соответствующие выбранным ребрам, склеятся друг с другом и образуют новый регулярный тор, который соответствует новому ребру, соединяющему атомы P и Q .

Еще раз обратим внимание на то, что эта операция локальна. Это вытекает из того, что на каждом уровне склеиваются только две конкретные связные компоненты уровня между собой. Какие именно компоненты склеиваются зависит от выбора чисел α_1 и β_1 при замене верхней перестановки $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$. Склеиваются именно те связные компоненты уровня, на которых эти числа соответствуют номерам листов, по которым траектория бильярда идет вниз. Это происходит из-за того, что ранее, при ударе от верхней границы, траектории переходили с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ на лист α_1 , с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист β_1 . А теперь, если переопределить верхнюю перестановку $\sigma[0]$ на $\sigma'[0] = (\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1) \circ (\alpha_1 \beta_1) \circ \sigma[0]$, траектории бильярда при ударе от верхней границы станут переходить с листа $\sigma^{-1}(0)(\alpha_1)$ на лист β_1 , а с листа $\sigma^{-1}(0)(\beta_1)$ на лист α_1 . Для листов $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ верно тоже самое. Это и означает склейку соответствующих двух связных компонент уровня. На фиксированном уровне интеграла нет других таких связных компонент, на которых эти числа соответствуют номерам листов, по которым траектория бильярда идет вниз. Тем самым мы доказали, что склейка описанных выше двух компонент на каждом из уровней означает требуемое локальное изменение грубой молекулы. $\square$

Доказательство теоремы 5. Заметим, что описанные выше алгоритмы 3, 5, 6 и леммы 5-8 доказывают теорему 5. А именно, алгоритм 3 позволяет склеивать два седловых атома без звездочек по ребру. Его корректность доказана в леммах 5 и 6. Алгоритм 5 позволяет склеивать уже два произвольных седловых атома (со звездочками или без) по ребру. Он является обобщением алгоритма 3. Его корректность доказана в лемме 7. Последний алгоритм 6 позволяет моделировать любую грубую молекулу с помощью бильярдов. Алгоритм моделирует все встречающиеся в грубой молекуле седловые атомы. А затем мы последовательно применяем алгоритм 5. Каждое применение алгоритма 5 соединяет ребром два произвольных ранее выбранных атома по ребру. Лемма 8 показывает, что эта склейка локальна, и доказывает корректность алгоритма 6. В результате алгоритма 6 мы получаем бильярдную книжку, моделирующую наперед заданную произвольную грубую молекулу. Это и доказывает теорему 5. $\square$

Заключение.

В работе дано описание динамических систем бильярдных книжек. Доказано, что для ее корректности необходимо коммутирование перестановок, отвечающих соседним дугам квадрик. Показано также, каким образом набор перестановок задает корректную бильярдную книжку определенного типа. Описаны фазовые пространства и изоэнергетические многообразия бильярдных книжек. Указаны явные формулы интегралов на фазовых пространствах бильярдных книжек.

Кроме того, введено обобщение 3-атомов и грубых молекул для кусочно-гладких динамических систем. Найдено взаимно-однозначное соответствие между торами Лиувилля на регулярных уровнях бильярдной книжки и циклами в разложении композиции определенных перестановок на независимые циклы.

Сформулированы алгоритмы:

- моделирования 3-атомов без звездочек;
- моделирования 3-атомов со звездочками;
- склейки двух 3-атомов без звездочек по ребру;
- общий алгоритм моделирования 3-атомов, который обобщает первые два алгоритма и приводит книжки, моделирующие 3-атомы, к единому виду;

- склейки по ребру двух произвольных атомов, со звездочками или без.

Сформулирован также алгоритм моделирования любой грубой молекулы, который использует описанные выше алгоритмы, и доказана его корректность. Все алгоритмы проиллюстрированы множеством примеров: были смоделированы атомы B , D_2 , A^* , склеены атомы B и D_2 по одному и двум ребрам, склеены атомы B и A^* по ребру, а также поэтапно смоделирована грубая молекула, содержащая атомы B , D_2 и A^* .

Таким образом, была подтверждена гипотеза В Фоменко и доказано, что для любой грубой молекулы алгоритмически строится бильярдная книжка такая, что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной за постановку задачи, большой вклад в улучшение текста работы и постоянное внимание к проводимым исследованиям.

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., 89, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.
- [2] С. Табачников, *Геометрия и бильярды*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2011, 180 с.; пер. с англ.: S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Stud. Math. Libr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.
- [3] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.-Ижевск, 2010, 338 с.; пер. с англ.: V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet porisms and beyond. Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics*, Front. Math., Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011, viii+293 pp.
- [4] E. Gutkin, *Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems*, Regul. Chaotic Dyn., 8:1 (2003), 1-13.
- [5] A. Plakhov, S. Tabachnikov, D. Treschev, *Billiard transformations of parallel flows: a periscope theorem*, J. Geom. Phys., 115 (2017), 157-166.
- [6] A. Glutsyuk, *On quadrilateral orbits in complex algebraic planar billiards*, Mosc. Math. J., 14:2 (2014), 239-289.
- [7] A. Glutsyuk, *On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature*, arXiv: 1706.04030.
- [8] А. А. Глуцюк, *О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны*, Докл. РАН, 481:6 (2018), 594-598; англ. пер.: A. A. Glutsyuk, *On two-dimensional polynomially integrable billiards on surfaces of constant curvature*, Dokl. Math., 98:1 (2018), 382-385.
- [9] М. Бялый, А. Е. Миронов, *О полиномиальных интегралах четвертой степени бильярда Биркгофа*, Современные проблемы механики, Сборник статей, Тр. МИАН, 295, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2016, 34-40; англ. пер.: M. Bialy,

- A. E. Mironov, *On fourth-degree polynomial integrals of the Birkhoff billiard*, Proc. Steklov Inst. Math., 295 (2016), 27-32.
- [10] M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*, J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
- [11] M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic Birkhoff conjecture for billiards on sphere and hyperbolic plane*, J. Geom. Phys., 115 (2017), 150-156.
- [12] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, УМН, 44:1(265) (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, *The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys, 44:1 (1989), 181–219.
- [13] А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Докл. АН СССР, 287:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Morse theory of integrable Hamiltonian systems*, Soviet Math. Dokl., 33:2 (1986), 502–506.
- [14] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, *A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, Math. USSR-Izv., 36:3 (1991), 567–596.
- [15] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 444 с., 447 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [16] А. А. Ошемков, *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$* , УМН, 42:6(258) (1987), 199-200; англ. пер.: A. A. Oshemkov, *The topology of surfaces of constant energy and bifurcation diagrams for integrable cases of the dynamics of a rigid body on $SO(4)$* , Russian Math. Surveys, 42:6 (1987), 241-242.
- [17] А. А. Ошемков, *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 23, Изд-во МГУ, М., 1988, 122-132.
- [18] A. A. Oshemkov, *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*, Topological classification of integrable systems, Adv. Soviet Math., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67-146.
- [19] П. В. Морозов, *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сб., 193:10 (2002), 113-138; англ. пер.: P. V. Morozov, *The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case*, Sb. Math., 193:10 (2002), 1507-1533.
- [20] П. В. Морозов, *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сб., 195:3 (2004), 69-114; англ. пер.: P. V. Morozov, *Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations*, Sb. Math., 195:3 (2004), 369-412.

- [21] Н. С. Славина, *Классификация семейства систем Ковалевской-Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности*, Докл. РАН, 452:3 (2013), 252-255; англ. пер.: N. S. Slavina, *Classification of the family of Kovalevskaya-Yehia systems up to Liouville equivalence*, Dokl. Math., 88:2 (2013), 537-540.
- [22] В. А. Кибкало, *Топология аналога случая интегрируемости Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ при нулевой постоянной площадей*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, №3, 46-50; англ. пер.: V. A. Kibkalo, *The topology of the analog of Kovalevskaya integrability case on the Lie algebra $so(4)$ under zero area integral*, Moscow Univ. Math. Bull., 71:3 (2016), 119-123.
- [23] С. С. Николаенко, *Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела*, Матем. сб., 207:1 (2016), 123-150; англ. пер.: S. S. Nikolaenko, *Topological classification of the Goryachev integrable case in rigid body dynamics*, Sb. Math., 207:1 (2016), 113-139.
- [24] С. С. Николаенко, *Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости*, Матем. сб., 205:2 (2014), 75-122; англ. пер.: S. S. Nikolaenko, *A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid*, Sb. Math., 205:2 (2014), 224-268.
- [25] А. Ю. Москвин, *Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина-Матвеева на двумерной сфере*, Матем. сб., 199:3 (2008), 95-132; англ. пер.: A. Yu. Moskvina, *Topology of the Liouville foliation on a 2-sphere in the Dullin-Matveev integrable case*, Sb. Math., 199:3 (2008), 411-448.
- [26] Е. О. Кантонистова, *Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2015, №5, 41-44; англ. пер.: E. O. Kantonistova, *Liouville classification of integrable Hamiltonian systems on surfaces of revolution*, Moscow Univ. Math. Bull., 70:5 (2015), 220-222.
- [27] Е. О. Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*, Матем. сб., 207:3 (2016), 47-92; англ. пер.: E. O. Kantonistova, *Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution*, Sb. Math., 207:3 (2016), 358-399.
- [28] Д. С. Тимонина, *Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на торе вращения в потенциальном поле*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2017, №3, 35-43; англ. пер.: D. S. Timonina, *Liouville classification of integrable geodesic flows on a torus of revolution in a potential field*, Moscow Univ. Math. Bull., 72:3 (2017), 121-128.
- [29] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.
- [30] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, №5, 31-34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *Description of singularities for system “billiard in an ellipse”*, Moscow Univ. Math. Bull., 67:5-6 (2012), 217-220.
- [31] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18—27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *Description of singularities for*

- billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas*, Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
- [32] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics*, Sb. Math., 206:10 (2015), 1463-1507.
- [33] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы*, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20-67; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, A. T. Fomenko, *Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems*, Izv. Math., 81:4 (2017), 688-733.
- [34] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63-103.
- [35] А. Т. Фоменко, V. V. Vedyushkina, *Topological billiards, conservation laws and classification of trajectories*, Functional Analysis and Geometry: Selim Grigorievich Krein Centennial. Edited by Peter Kuchment and Evgeny Semenov. American Mathematical Society. Series: Contemporary Mathematics. Volume 733; 2019; pp.129-148
- [36] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17-56; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems*, Sb. Math., 209:12 (2018), 1690-1727.
- [37] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, *Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами*, Докл. РАН, 479:6 (2018), 607-610; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, A. T. Fomenko, I. S. Kharcheva, *Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards*, Dokl. Math., 97:2 (2018), 174-176.
- [38] И. С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., в печати; англ. пер.: I. S. Kharcheva, *Isoenergy Manifolds of Integrable Billiard Books*, Moscow Univ. Math. Bull.
- [39] V.I. Dragović, M. Radnović, *Pseudo-integrable billiards and double reflection nets*, Russian Mathematical Surveys, 70(1) (2015), 1–31.
- [40] В. А. Москвин, *Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, 3, 21–29; англ. пер.: V. A. Moskvina, *Topology of Liouville bundles of integrable billiard in non-convex domains*, Moscow University Mathematics Bulletin, 73:3 (2018), 103–110.
- [41] В. В. Ведюшкина, *Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе*, Матем. сб., 211:2 (2020), 46–73 mathnet; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, *Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus*, Sb. Math., 211:2 (2020), 201–225.