

Ощемков
А.А.

(кандидатская
диссертация)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ОШЕМКОВ Андрей Александрович

УДК

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В НЕКОТОРЫХ
КЛАССИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Научный руководитель –
член-корреспондент АН России,
профессор А.Т. Фоменко

МОСКВА – 1992 6

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I. Топология изоэнергетических поверхностей для классических случаев интегрируемости	15
§ 1. Интегрируемые случаи в задаче о движении твердого тела и некоторых ее обобщениях	15
§ 2. Топологический тип изоэнергетических поверхнос- тей.	26
Глава 2. Вычисление инварианта Фоменко.	42
§ 3. Случай Эйлера - Жуковского.	42
§ 4. Случаи Ковалевской, Горячева - Чаплыгина, Сретен- ского.	49
§ 5. Случай Лагранжа.	55
§ 6. Случай Клебша.	63
§ 7. Случай Стеклова.	67
§ 8. Четырехмерное твердое тело	82
Приложение: список букв-атомов и слов-молекул.	101
Литература	105

ВВЕДЕНИЕ

Одна из наиболее известных задач механики — это задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Ее исследованием занимались Эйлер, Лагранж, Пуассон, Ковалевская и др.. Ими были найдены случаи интегрируемости и указаны способы сведения задачи к квадратурам. Исследованию различных обобщений этой задачи (движение гиростата, движение твердого тела в жидкости, движение заряженного твердого тела в магнитном поле и т.п.) также посвящено множество работ, в которых найдены интегрируемые случаи. Подробное описание указанных задач, а также обсуждение истории данного вопроса можно найти в [1,2]. Известно, что в общем случае эти задачи неинтегрируемы (см., например, [2-4]). Тем не менее исследование интегрируемых случаев важно для понимания общих закономерностей поведения решений этих систем.

Большое значение здесь имеет качественное исследование системы, поскольку точные решения обычно выражаются достаточно сложно и поэтому не дают наглядного представления о глобальном поведении решений. Одним из основных результатов качественного исследования интегрируемых гамильтоновых систем является теорема Лиувилля, которая утверждает, что неособая компактная совместная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы есть несвязное объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями (см., например, [5]).

Теорема Лиувилля дает полную информацию о поведении интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности неособой совместной поверхности уровня первых интегралов. Вопрос о поведении системы в окрестности критической поверхности уровня гораздо сложнее. Критические поверхности уровня первых интегралов для конкретных вполне интегрируемых гамильтоновых систем изучались, например, в рабо-

тах М.П.Харламова (см. [6]) и Т.И.Погосяна [7-9]. Затем в работах А.Т.Фоменко [10-12] была построена общая теория перестроек торов Лиувилля, а также обнаружен новый топологический инвариант, характеризующий глобальное устройство интегрируемой гамильтоновой системы на изоэнергетических поверхностях. В связи с этим возникла задача вычисления инварианта Фоменко для конкретных механических систем. В настоящей работе эта задача решена для классических случаев интегрируемости в задачах, связанных с движением твердого тела.

Опишем постановку задачи более подробно.

Гамильтонова система с двумя степенями свободы определяется тройкой (M^4, ω, H) , где M^4 — гладкое многообразие, ω — невырожденная 2-форма на M^4 (симплектическая структура), H — гладкая функция на M^4 (гамильтониан). Невырожденная форма ω определяет изоморфизм расслоений $I_\omega: TM \rightarrow T^*M$ по формуле $(I_\omega v)u = \omega(v, u)$, где v, u — векторные поля на M^4 . Векторное поле $I_\omega^{-1}(dH)$ называется косым градиентом функции H (обозначение: $\text{sgrad } H$). Решения гамильтоновой системы (M^4, ω, H) есть, по определению, интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad } H$. Скобкой Пуассона двух функций f_1, f_2 на M^4 называется функция $\{f_1, f_2\} = \omega(\text{sgrad } f_1, \text{sgrad } f_2)$. Интегралом гамильтоновой системы (M^4, ω, H) называется гладкая функция K , коммутирующая с H (т.е. $\{K, H\} \equiv 0$). Если для системы (M^4, ω, H) существует интеграл K , функционально независимый с H , то по теореме Лиувилля неособые компактные совместные поверхности уровня функций H и K есть двумерные торы T^2 с условно-периодическими интегральными траекториями (см. [5]).

Рассмотрим неособую поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{x \in M^4 / H(x) = h\}$. Ограничив функцию K на Q_h^3 , мы получаем функцию $K_h: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$, неособые поверхности уровня которой

есть Лиувиллевы торы. Вопрос о том, как устроены особые поверхности уровня функции K_h , а также, какие перестройки торов Лиувилля происходят при критических значениях функции K_h , был исследован в работах А.Т.Фоменко [10-12]. В этих работах построена общая "теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем" (с n степенями свободы). В частности, в этих работах построен топологический инвариант (инвариант Фоменко) интегрируемого боттовского нерезонансного гамильтониана. Случай систем с двумя степенями свободы более подробно исследован в работе А.В.Болсинова, С.В.Матвеева, А.Т.Фоменко [13], в которой, в частности, были введены удобные обозначения и терминология для описания этого инварианта. Приведем описание инварианта Фоменко, следуя работе [13].

О п р е д е л е н и е [10-11]. Интеграл K называется боттовским на Q_h^3 , если все критические точки функции K_h организованы в невырожденные критические подмногообразия.

О п р е д е л е н и е [13]. Буквой-атомом называется пара (F, γ) , где γ - непустой конечный связный граф, лежащий в компактной ориентированной поверхности F , причем:

- 1) степень каждой вершины графа γ равна 0, 2 или 4;
- 2) каждая связная компонента разности $F \setminus \gamma$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$;
- 3) компоненты связности $F \setminus \gamma$ разбиваются на 2 класса (положительные и отрицательные) так, что к каждому ребру графа γ примыкает ровно одно положительное и одно отрицательное кольцо.

Замечание: единственная буква-атом, для которой ее граф γ содержит вершину степени 0, - это (D^2, p) , где D^2 - двумерный диск, а p - его центр. В статье [13] этой букве-атому присвоено обозначение A . Для всех остальных букв-атомов граф γ имеет лишь вершины степени 2 и 4. Список букв-атомов с числом вершин

графа γ не более 3 приведен в [13]. Буквам-атомам в этом списке присвоены некоторые обозначения, которые мы будем использовать.

Рассмотрим теперь некоторую интегрируемую гамильтонову систему (M^4, ω, H) . Пусть K — дополнительный боттовский интеграл на Q_h^3 , где h — регулярное значение функции H . Будем предполагать, что Q_h^3 компактно. Тогда критическими подмногообразиями функции K_h могут быть лишь торы, бутылки Клейна и окружности [10-11]. Поскольку у систем, исследуемых в данной работе, нет двумерных критических подмногообразий, то в дальнейшем будем считать, что критическими подмногообразиями функции K_h являются лишь окружности: минимальные, седловые или максимальные. Пусть α — критическое значение функции K_h , N_α — связная компонента многообразия $K_h^{-1}[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, содержащая единственную связную компоненту C критической поверхности уровня $K_h^{-1}(\alpha)$. Кодирование перестройки торов Лиувилля при критическом значении α буквой-атомом $(F_\alpha, \gamma_\alpha)$ основано на следующем утверждении.

Л е м м а 13. На многообразии N_α можно ввести структуру ориентированного расслоения Зейферта с ориентированными слоями так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) F_α — база расслоения Зейферта $\pi: N_\alpha \rightarrow F_\alpha$;
- 2) $\pi^{-1}(\gamma_\alpha) = C$;
- 3) слой является особым тогда и только тогда, когда он проектируется в вершину степени 2 графа γ_α , причем все особые слои имеют тип $(2,1)$;
- 4) ориентации N_α , F_α и слоев согласованы, причем на слоях ориентация индуцирована полем $\text{grad } H$.

Пусть $C_1, \dots, C_m$ — это все связные компоненты критических поверхностей уровня функции K_h . Им соответствует набор букв-атомов $(F_1, \gamma_1), \dots, (F_m, \gamma_m)$, причем для каждой граничной окружности поверхностей F_i однозначно определен тор Лиувилля, проектирующийся в эту окружность (при проекции $\pi_i: N_i \rightarrow F_i$), задающей ука-

занное в Лемме расслоение Зейферта). Построим теперь следующий граф G_h : 1) вершинам графа G_h сопоставлены буквы-атомы (F_i, γ_i) ; 2) из каждой вершины (F_i, γ_i) выходят отрезки, соответствующие граничным окружностям поверхности F_i ; 3) два таких отрезка, выходящих из вершин (F_i, γ_i) и (F_j, γ_j) , образуют ребро графа G_h , если соответствующие им два тора Лиувилля лежат в одной связной компоненте многообразия $Q_h^3 \setminus (\bigcup_{i=1}^m C_i)$.

О п р е д е л е н и е [13]. Граф G_h называется словом-молекулой, отвечающей изоэнергетической поверхности Q_h^3 интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, H) .

О п р е д е л е н и е [13]. Две интегрируемые гамильтоновы системы на Q^3 и $\tilde{Q}^3$ называются грубо эквивалентными, если соответствующие им слоения (неособые слои - торы Лиувилля, особые - описываются буквами-атомами) получаются друг из друга в результате следующей операции: разрезание Q^3 по некоторому Лиувиллеву тору и склейка двух получившихся граничных торов по некоторому диффеоморфизму, сохраняющему ориентацию (в результате получаем слоение на $\tilde{Q}^3$).

Т е о р е м а [13]. Существует естественная биекция между множеством всех слов-молекул и классами грубо эквивалентных гамильтоновых систем.

Таким образом, инвариант Фоменко изоэнергетической поверхности интегрируемой гамильтоновой системы - это соответствующее слово-молекула. Этот инвариант характеризует систему с точностью до грубой эквивалентности.

У изоэнергетической поверхности Q_h^3 имеется другой естественный топологический инвариант - это топологический тип Q_h^3 . Отметим, что инвариант Фоменко и топологический тип не выражаются друг через друга, т.е. существуют системы на гомеоморфных Q и Q' с различными инвариантами Фоменко и системы на негомеоморфных

Q и Q' с совпадающими инвариантами Фоменко. Отметим также, что можно снабдить слово-молекулу некоторыми числовыми метками, получив тем самым меченое слово-молекулу. Это, так называемый, инвариант Фоменко - Цишанга, открытый в [14], который уже полностью определяет топологию изоэнергетической поверхности. Однако в данной работе инвариант Фоменко - Цишанга рассматриваться не будет.

Топологический тип изоэнергетической поверхности Q_h^3 можно определять независимо от того, интегрируема система или нет. Для некоторых гамильтоновых систем эта работа была проведена по схеме, предложенной С.Смейлом в [15]. Так, в работах С.Б.Каток [16] и Я.В.Татарина [17-18] был определен топологический тип Q_h^3 для задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой в частности, для интегрируемых случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Основным результатом настоящей работы является вычисление инварианта Фоменко и определение топологического типа изоэнергетических поверхностей для различных классических случаев интегрируемости задачи о движении тяжелого твердого тела и некоторых ее обобщений. Тем самым получена классификация изоэнергетических поверхностей этих интегрируемых случаев с точностью до грубой эквивалентности. В частности, будет доказано, что дополнительный интеграл этих интегрируемых случаев почти всегда является боттовским.

Изложим теперь кратко содержание диссертации.

В главе I приводится список интегрируемых случаев, исследуемых в данной работе, и для каждого из них определяется топологический тип изоэнергетических поверхностей Q_h^3 при различных значениях h и параметров системы.

Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой, как было показано С.П.Новиковым (см. [19]), можно записать в виде уравнений Эйлера на пространстве $e(3)^*$, сопряженном алгебре Ли

$e(3)$ группы движений 3-мерного евклидова пространства. В §I описано аналогичное вложение в пространство $e(3)^*$ системы уравнений, полученной М.П.Харламовым [6]. Эта система является обобщением классических уравнений Эйлера - Пуассона и описывает различные задачи, связанные с динамикой твердого тела. Например, движение гиростата (при $\lambda = \text{const}$ в формуле (1.5) из §I) или наэлектризованного твердого тела в магнитном поле (если $\lambda(v)$ - линейная вектор-функция).

Описанное вложение системы в $e(3)^*$ позволяет исследовать различные интегрируемые случаи единым образом, поскольку теперь мы можем рассматривать все системы (при подходящем выборе гамильтониана) на одних и тех же симплектических многообразиях, а именно на симплектических слоях скобки Ли - Пуассона для алгебры Ли $e(3)$. Эти симплектические слои выделяются инвариантами f_1 и f_2 алгебры Ли $e(3)$ и гомеоморфны $TS^2 = \{f_1 = 1, f_2 = q\} \subset e(3)^*$. В дальнейшем исследование интегрируемых случаев в данной работе проводится именно таким образом, т.е. без учета физического смысла фазовых переменных и параметров системы. Его можно установить в каждом конкретном случае, выразив исходные переменные задачи через координатные функции на $e(3)^*$. Так, например, уравнениями Эйлера на $e(3)^*$ описываются, помимо задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой, следующие задачи: 1) движение твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости (переменные - это полный момент и импульс системы тело-жидкость) [2]; 2) динамика спина в А-фазе сверхтекучего ^3He (переменные - магнитный момент и спиновая часть параметра порядка) [19]; 3) деформация упругого стержня (здесь фазовые переменные дифференцируются не по времени, а по дуговой координате стержня) [20]. Отметим, что аналогии между различными перечисленными выше задачами механики исследовались многими авторами (см., например, [19, 21, 22]).

Далее в §I приведен список интегрируемых случаев, которые исследуются в данной работе. Это интегрируемые случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева - Чаплыгина, Жуковского, Сретенского, Клебша, Стеклова. Этот список содержит все основные интегрируемые случаи, которые существуют для уравнений Эйлера на $e(3)^*$ при определенных ограничениях на вид гамильтониана и дополнительного интеграла. См. по этому поводу работы [2, 4, 23, 24, 25].

Основной метод исследования указанных интегрируемых случаев, применяемый в данной работе, заключается в рассмотрении различных отображений вида $F = f_1 \times \dots \times f_k: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, где $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k$. Обычно функции f_i - это интегралы, а $F^{-1}(y)$, где $y \in \mathbb{R}^k$, - это интегральные многообразия рассматриваемой гамильтоновой системы. Топология интегральных многообразий и их бифуркации определяются в результате исследования бифуркационной диаграммы $\Sigma = F(C)$, где C - множество критических точек отображения F (см. [15]). В конце §I доказаны два простых факта, упрощающие это исследование в конкретных случаях. Утверждение Леммы 2 используется при описании бифуркационных кривых, из которых состоит Σ (нахождение точек перегиба, точек возврата и т.п.), а утверждение Леммы I - при вычислении индексов критических точек, лежащих в прообразе этих кривых.

В §2 главы I содержится описание топологического типа изоэнергетических поверхностей для случаев интегрируемости Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша.

Описание топологического типа проводится следующим образом. Рассматривается, так называемое, отображение момента $f_2 \times H$ фазового пространства системы в $\mathbb{R}^2$, определяемое интегралами системы (f_2 - инвариант алгебры Ли $e(3)$, H - гамильтониан). Образ критических точек этого отображения есть бифуркационная диаграмма, разбивающая плоскость $\mathbb{R}^2$ на области. Изоэнергетические

поверхности Q^3 - это прообразы точек $y \in \mathbb{R}^2$ при отображении $f_2 \times H$. Топологический тип $Q^3 = (f_2 \times H)^{-1}(y)$ для каждой из областей определяется методом проекции на сферу Пуассона (этот метод был разработан С.Смейлом [15]). По существу, здесь используется тот факт, что в рассматриваемых случаях Q^3 есть поверхность уровня функции H , которая задана на многообразии, гомеоморфном векторному расслоению $(TS^2 - \text{совместные поверхности уровня инвариантов } f_1 \text{ и } f_2 \text{ в } e(3)^*)$, и является положительно-определенной квадратичной функцией на слоях этого расслоения.

Отметим, что случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, вообще говоря, являются частными случаями исследованных в работах [16, 17, 18] гамильтонианов достаточно общего вида. Для этих случаев в §2 также приводится описание бифуркационных диаграмм, поскольку они понадобятся при вычислении инварианта Фоменко в главе 2.

В главе 2 для указанных выше интегрируемых случаев, а также для "уравнений движения 4-мерного твердого тела" (см. ниже) вычисляются инварианты Фоменко (слова-молекулы). Полное описание возможных слов-молекул для каждого случая проводится аналогично описанию топологического типа изоэнергетических поверхностей: бифуркационные диаграммы, построенные в §2, дополняются кривыми, разбивающими плоскость параметров на области так, что для всех точек из одной области изоэнергетические поверхности Q^3 имеют один и тот же топологический тип и инвариант. Все встречающиеся в данной работе слова-молекулы перечислены в Таблице I (см. Приложение). Отметим, что приведенные рисунки с разделяющими кривыми позволяют легко понять, как меняется молекула, соответствующая изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{H=h\}$, при изменении значения гамильтониана h . Нужно лишь посмотреть, через какие области на плоскости с разделяющими кривыми проходит соответствующая прямая, параллельная оси h . Вопрос, о том как меняется слово-молекула при

изменении значения h тесно связан с "теорией бордизмов интегрируемых гамильтоновых систем" (см. [26]).

Построенный в работах [10-12] инвариант определялся для гамильтоновой системы, интегрируемой при помощи боттовского интеграла. Как было показано в дальнейшем С.В.Матвеевым и А.Т.Фоменко [27], всю теорию можно обобщить, заменив условие боттовости требованием, чтобы интеграл был "ручным". Тем не менее интересен вопрос о том, являются ли боттовскими классические интегралы известных интегрируемых случаев. Ответ на этот вопрос дается в данной работе.

Т е о р е м а . Для гамильтоновой системы на симплектическом многообразии $TS^2 = \{f_1 = 1, f_2 = q\} \subset e(3)^*$ с гамильтонианом H любого из интегрируемых случаев (I.12)-(I.19) указанный дополнительный интеграл K является боттовским на всех неособых поверхностях $Q_h^3 = \{H = h\}$ кроме конечного их числа.

Доказательство этой теоремы будет получено при построении инвариантов для каждого интегрируемого случая (см. §§ 3-7, Теоремы I-7). Кроме того будет дано описание тех изоэнергетических поверхностей, на которых дополнительный интеграл K не является боттовским.

Построение слова-молекулы для каждого интегрируемого случая проводится при помощи исследования отображения момента $H \times K$, где H - гамильтониан, а K - дополнительный интеграл. В §3 (случай Эйлера - Жуковского), §4 (случай Ковалевской, Горячева - Чаплыгина и Сретенского) и §6 (случай Клебша) существенно использованы результаты М.П.Харламова и Т.И.Погосяна, в работах которых ([6], [7-9]) построены бифуркационные диаграммы отображения $H \times K$ для этих интегрируемых случаев.

В §5 исследуется интегрируемый случай Лагранжа. Доказано, что в этом случае все слова-молекулы имеют вид $A-A$, т.е. у

системы нет одномерных гиперболических траекторий. На самом деле доказан более общий факт: описаны все потенциальные функции $V(x)$, такие что при замене в гамильтониане линейного потенциала (классический случай Лагранжа) на функцию $V(x)$ новых слов-молекул (кроме $A \rightarrow A$) у системы не возникает.

В §7 рассматривается интегрируемый случай Стеклова. С топологической точки зрения этот случай почти не исследовался. Отметим лишь работу [28], в которой рассмотрено отображение фазового пространства системы в $\mathbb{R}^4$ (значения инвариантов алгебры $e(3)$, гамильтониана и интеграла) и, в частности, определено возможное количество торов Лиувилля в прообразах регулярных точек этого отображения. Поэтому в §7 проведено подробное построение бифуркационных диаграмм отображения $H \times K: TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где H — гамильтониан, K — дополнительный интеграл случая Стеклова, заданные на $TS^2 = \{f_1=1, f_2=g\} \subset e(3)^*$. Фактически, бифуркационные диаграммы строятся для отображения $H_0 \times K_0$, где H_0, K_0 — некоторые функции (зависящие лишь от двух параметров), такие что любой гамильтониан случая Стеклова выражается как линейная комбинация функций H_0, K_0, f_1, f_2 . Затем для всех этих гамильтонианов определяются перестройки торов Лиувилля и строятся соответствующие слова-молекулы. Отметим, что в полном списке слов-молекул, соответствующих изоэнергетическим поверхностям случая Стеклова, появляются слова-молекулы, содержащие циклы (см. Теорему 7 из §7).

Последний §8 посвящен исследованию одного известного интегрируемого случая уравнений Эйлера для алгебры Ли $so(4)$. Это, так называемые, уравнения движения 4-мерного твердого тела (аналог обычного случая Эйлера). В данном случае симплектические многообразия, на которых задана система, гомеоморфны $S^2 \times S^2$. Это регулярные орбиты коприсоединенного представления группы Ли $so(4)$.

В частности, в отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих параграфах, они компактны. Гамильтониан интегрируемого случая и дополнительный интеграл квадратичны. Они были найдены С.В.Манаквым [29]. Обобщение результатов работы [29] на случай произвольных полупростых алгебр Ли было получено А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [30]. С этой точки зрения исследуемое семейство интегрируемых гамильтонианов есть частный случай гамильтонианов нормальной серии (см. [31], [32]) для алгебры Ли $so(4)$. Кроме того, этими уравнениями (движение 4-мерного твердого тела) описываются также некоторые реальные задачи физики и механики (см. [19], [33], [34], [35]).

Как и для случая Стеклова, в §8 строятся бифуркационные диаграммы для отображения $H_0 \times K_0$, где H_0 , K_0 — некоторые коммутирующие функции (относительно скобки Ли — Пуассона на $so(4)^*$), а все гамильтонианы исследуемого интегрируемого случая есть линейные комбинации функций H_0 , K_0 и инвариантов алгебры Ли $so(4)$. Далее (аналогично §§ 3–7) в §8 построены кривые на плоскости параметров, разбивающие ее на области таким образом, что для всех точек из одной связной области соответствующие им изоэнергетические поверхности имеют одинаковые топологический тип и инвариант Фоменко. Доказано, что дополнительный интеграл является боттовским на почти всех изоэнергетических поверхностях.

При контракции $so(4)$ к $e(3)$, описанной в [12], указанный интегрируемый случай на $so(4)^*$ переходит в интегрируемый случай Клебша на $e(3)^*$. Эта связь наглядно демонстрируется тем, что построенные для обоих интегрируемых случаев разделяющие кривые переходят друг в друга при соответствующем предельном переходе.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Т.Фоменко за постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I. ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

§ I. Интегрируемые случаи в задаче о движении твердого тела и некоторых ее обобщениях.

Классические уравнения Эйлера - Пуассона, описывающие движение твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести, в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, имеют вид:

$$\begin{cases} A\dot{\omega} = A\omega \times \omega - P \cdot z \times v \\ \dot{v} = v \times \omega \end{cases} \quad (I.I)$$

Фазовые переменные системы: ω - вектор угловой скорости, v - единичный вертикальный вектор. Параметры системы: матрица $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - тензор инерции тела, P - вес тела, z - вектор с началом в неподвижной точке и концом в центре масс тела. Запись $a \times b$ означает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Вектор $A\omega$ имеет смысл кинетического момента твердого тела относительно неподвижной точки. Н.Е. Жуковский исследовал задачу о движении твердого тела, имеющего полости, целиком заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. В этом случае кинетический момент тела равен $A\omega + \lambda$, где λ - постоянный (в системе координат, связанной с телом) вектор, характеризующий циклические движения жидкости в полостях. Аналогичный вид кинетический момент тела имеет в случае, когда в теле закреплен маховик, ось которого направлена вдоль вектора λ . Такую механическую систему называют гиростатом. Движение гиростата в поле силы тяжести, а также некоторые другие задачи механики (см., например, [36]) описываются системой уравнений

$$\begin{cases} A \dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega - P \cdot z \times v \\ \dot{v} = v \times \omega \end{cases} \quad (I.2)$$

частным случаем которой (при $\lambda=0$) является система (I.1).

Другое обобщение уравнений (I.1) связано с заменой внешнего однородного поля (силы тяжести) на более сложное. Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой в произвольном потенциальном силовом поле были получены Лагранжем. Если это поле имеет ось симметрии, то ее можно считать вертикальной и уравнения примут вид:

$$\begin{cases} A \dot{\omega} = A\omega \times \omega + v \times \frac{\partial u}{\partial v} \\ \dot{v} = v \times \omega \end{cases} \quad (I.3)$$

где $u(v)$ — потенциальная функция, а через $\frac{\partial u}{\partial v}$ обозначен вектор с координатами $(\frac{\partial u}{\partial v_1}, \frac{\partial u}{\partial v_2}, \frac{\partial u}{\partial v_3})$. При $u = P(z, v)$ получаем систему (I.1). Через (α, β) обозначено евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Естественно, обобщения (I.2) и (I.3) можно комбинировать, рассматривая движение гиростата в осесимметричном силовом поле и т.п.. Наиболее общие уравнения, описывающие различные задачи динамики твердого тела, были получены М.П.Харламовым [6]. Рассматривая так называемые гироскопические силы, он получил следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A \dot{\omega} = (A\omega + \mathcal{X}) \times \omega + v \times \frac{\partial u}{\partial v} \\ \dot{v} = v \times \omega \end{cases} \quad (I.4)$$

где $\mathcal{X}(v)$ — вектор-функция, компоненты которой являются коэффициентами некоторой замкнутой 2-формы на группе $SO(3)$ (формы гироскопических сил). При этом вектор-функция $\mathcal{X}(v)$ не произ-

вольна, а имеет вид

$$\mathcal{X} = \lambda + (\Lambda - \operatorname{div} \lambda) v, \quad (I.5)$$

где $\lambda(v)$ - произвольная вектор-функция, а $\Lambda = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial v_j} \right)^T$ - транспонированная матрица Якоби. Очевидно, системы (I.1) - (I.3) являются частными случаями системы (I.4).

У системы (I.4) всегда существуют геометрический интеграл $F = (v, v) = 1$ и интеграл энергии $E = \frac{1}{2} (A\omega, \omega) + \mathcal{U}(v)$. Если $\mathcal{X}(v)$ имеет вид (I.5), то существует интеграл площадей $G = (A\omega + \lambda, v)$. Как показано в [6], уравнения (I.4), (I.5) гамильтоновы относительно некоторой симплектической структуры на совместных поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей. На самом деле уравнения (I.4), (I.5) можно представить в виде уравнений Эйлера для алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. То, что уравнения движения твердого тела (I.3) можно представить в виде уравнений Эйлера для алгебры Ли $e(3)$, было впервые отмечено С.П.Новиковым (см. [19]). Физическая интерпретация уравнений Эйлера для некоторых алгебр Ли более высоких размерностей рассматривалась О.И.Боголюбским [33-34]. Опишем аналогичное вложение системы (I.4), (I.5) в пространство $e(3)^*$, сопряженное алгебре Ли $e(3)$.

На пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли - Пуассона двух произвольных функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, $[,]$ - коммутатор в алгебре Ли $e(3)$, а $d_x f$, $d_x g$ - дифференциалы функций f и g в точке x , принадлежащие $e(3)$ при стандартном отождествлении $e(3)$ и $e(3)^{**}$ (см., например, [32]). Выберем координатные функции $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ на $e(3)^*$, для которых скобка имеет вид:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0, \quad (1.6)$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, а $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$. Гамильтонова система на $e(3)^*$ со скобкой (1.6) (уравнения Эйлера) по определению имеет вид: $\dot{S}_i = \{S_i, H\}$, $\dot{R}_i = \{R_i, H\}$, где H — функция на $e(3)^*$ (гамильтониан). Вводя вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$ и $R = (R_1, R_2, R_3)$, эти уравнения можно переписать в виде обобщенных уравнений Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{S} = \frac{\partial H}{\partial S} \times S + \frac{\partial H}{\partial R} \times R \\ \dot{R} = \frac{\partial H}{\partial S} \times R \end{cases} \quad (1.7)$$

Предложение. Отображение $\varphi: \mathbb{R}^6(\omega, v) \rightarrow \mathbb{R}^6(S, R)$, заданное формулами

$$S = -(A\omega + \lambda), \quad R = v, \quad (1.8)$$

устанавливает изоморфизм системы (1.4), (1.5) и системы (1.7) с гамильтонианом

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3} + u, \quad (1.9)$$

где параметры A_1, A_2, A_3 и функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u$ берутся из системы (1.4), (1.5), но функции заданы не на $\mathbb{R}^3(v)$, а на $\mathbb{R}^3(R)$.

Доказательство. Достаточно показать, что дифференциал $d\varphi$ отображения (1.7) переводит векторное поле, определяемое системой (1.4), (1.5), в векторное поле, определяемое системой (1.8), (1.9). В выбранных координатах дифференциал задается матрицей 6×6 :

$$d\varphi = \begin{pmatrix} -A & -\Lambda^T \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Таким образом, надо показать, что для любой точки $P \in \mathbb{R}^6(\omega, v)$ выполнено равенство:

$$\begin{pmatrix} -A & -\Lambda^T \\ 0 & E \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{R} \end{pmatrix}_{\varphi(P)}.$$

Вычисляя, получаем:

$$\dot{S} = \frac{\partial H}{\partial S} \times S + \frac{\partial H}{\partial R} \times R = (A^{-1}(S+\lambda)) \times S + (\Lambda A^{-1}(S+\lambda)) \times R + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} \times R;$$

$$\begin{aligned} -A\dot{\omega} - \Lambda^T \dot{v} &= -(A\omega + \lambda + (\Lambda - \operatorname{div} \lambda)v) \times \omega - v \times \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} - \Lambda^T (v \times \omega) = \\ &= \omega \times (A\omega + \lambda) - ((\Lambda v) \times \omega + \Lambda^T (v \times \omega) - \operatorname{div} \lambda (v \times \omega)) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} \times v = \\ &= \omega \times (A\omega + \lambda) - (\Lambda \omega) \times v + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} \times v. \end{aligned}$$

Здесь использована формула $(Ca) \times b + a \times (Cb) + C^T(a \times b) = \operatorname{tr} C (a \times b)$, которая справедлива для любой матрицы C и векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Сравнивая полученные выражения и учитывая (1.8), получаем, что

$$\dot{S}(\varphi(P)) = (-A\dot{\omega} - \Lambda^T \dot{v})(P) \quad . \quad \text{Равенство} \quad \dot{R}(\varphi(P)) = \dot{v}(P)$$

проверяется аналогично. Предложение доказано.

С л е д с т в и е . Условие (1.5), налагаемое на вектор-функцию $\mathcal{X}(v)$, равносильно тому, что система (1.4) эквивалентна системе, задаваемой уравнениями Эйлера на $e(3)^*$ (т.е. уравнениями (1.7)) с гамильтонианом, квадратичным по переменным S , т.е. гамильтонианом вида

$$H = (CS, S) + (W, S) + V, \quad (1.10)$$

где C — постоянная симметричная матрица 3×3 , $W(R)$ — произвольная вектор-функция, $V(R)$ — произвольная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточность условия (1.5) уже доказана. Докажем необходимость. Пусть система (1.4) с параметрами A , $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ эквивалентна системе (1.7) с некоторым гамильтонианом вида (1.10). Заметим, что ортогональным вращением

по переменным S , т.е. линейной заменой координат в $e(3)^*$, сохраняющей скобку (I.6), мы можем привести гамильтониан (I.10) к виду (I.9) с некоторыми параметрами $\tilde{A}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{u}$. Таким образом, мы получаем, что две системы вида (I.4) с параметрами A , x , u и $\tilde{A}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ задают один и тот же поток в $\mathbb{R}^6(\omega, v)$. Легко проверяется, что это возможно тогда и только тогда, когда $A = k \tilde{A}$, $x(v) = k \tilde{x}(v)$, $u(v) = k \tilde{u}(v) + \psi(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$, где k — константа, а $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Так как $\tilde{x}$ имеет вид (I.5), то $x = \lambda + (\Delta - \operatorname{div} \lambda) v$, где $\lambda = k \tilde{\lambda}$. Следствие доказано.

При построенном отображении (I.8) интегралы $F = (v, v)$ и $G = (A\omega + \lambda, v)$ переходят в инварианты алгебры Ли $e(3)$

$$f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, \quad f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3,$$

а интеграл энергии $E = \frac{1}{2}(A\omega, \omega) + u(v)$ — в гамильтониан (I.9). Система (I.7) гамильтонова на совместных поверхностях уровня функций f_1 и f_2

$$\{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, \quad f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g\}. \quad (I.11)$$

Это симплектические многообразия, гомеоморфные (при $c > 0$) касательному расслоению к двумерной сфере TS^2 . Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли — Пуассона на TS^2 . Поскольку линейное преобразование $S' = S$, $R' = \gamma R$, где $\gamma = \text{const}$, сохраняет скобку (I.6), будем считать, что всегда $c = 1$.

Как уже отмечалось, система уравнений (I.7) с гамильтонианом (I.9) (или эквивалентная система (I.4), (I.5)) описывает различные задачи динамики твердого тела и некоторые другие. До недавнего времени все эти задачи изучались отдельно и для каждой из них были найдены интегрируемые случаи. В дальнейшем мы будем исследо-

вать систему уравнений (I.7) с гамильтонианом (I.9) на симплектических многообразиях $\{f_1=1, f_2=g\} \subset e(3)^*$, не вникая в физический смысл фазовых переменных и параметров системы.

Ниже приведен список основных известных интегрируемых случаев для уравнений (I.7), (I.9) с указанием: кем, когда и для какой задачи этот случай был впервые обнаружен. Для каждого случая указаны гамильтониан H и дополнительный интеграл K , функционально независимый с H на $TS^2 = \{f_1=1, f_2=g\}$. При этом дополнительный интеграл может существовать не на всех поверхностях уровня f_1 и f_2 , а лишь для некоторых значений g .

Случай Эйлера (1750 г. - движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой).

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3},$$

$$K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$
(I.12)

Случай Лагранжа (1788 г. - движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой).

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + \alpha R_3,$$

$$K = S_3.$$
(I.13)

Случай Ковалевской (1889 г. - движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой).

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{A} + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2,$$

$$K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 R_1 \right)^2 + \left(\frac{S_1 S_2}{A} - \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1 \right)^2.$$
(I.14)

Случай Горячева - Чаплыгина (1899 г. - движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой).

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2S_3^2}{A} + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2, \quad (I.15)$$

$$K = S_3(S_1^2 + S_2^2) - AR_3(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2).$$

Здесь $\{H, K\} = (S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3)(\alpha_2 S_1 - \alpha_1 S_2)$. Поэтому система интегрируема лишь на поверхности $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$.

Случай Жуковского (1885 г. - движение гиростата в поле силы тяжести).

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3}, \quad (I.16)$$

$$K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Случай Сретенского (1963 г. - движение гиростата в поле силы тяжести).

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2(S_3 + \lambda)^2}{A} + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2, \quad (I.17)$$

$$K = (S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) - AR_3(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2).$$

Здесь, как и в случае Горячева - Чаплыгина, система интегрируема лишь на поверхности $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$.

Случай Клебша (1871 г. - движение твердого тела в жидкости).

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3} + \frac{\varepsilon}{2}(A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2), \quad (I.18)$$

$$K = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \frac{\varepsilon}{2}(A_2 A_3 R_1^2 + A_3 A_1 R_2^2 + A_1 A_2 R_3^2).$$

Случай Стеклова (1893 г. - движение твердого тела в жидкости).

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3} + \varepsilon(A_1 S_1 R_1 + A_2 S_2 R_2 + A_3 S_3 R_3) + \frac{\varepsilon^2}{2}(A_1(A_2^2 + A_3^2)R_1^2 + A_2(A_3^2 + A_1^2)R_2^2 + A_3(A_1^2 + A_2^2)R_3^2),$$

(I.19)

$$K = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \varepsilon (A_2 A_3 S_1 R_1 + A_3 A_1 S_2 R_2 + A_1 A_2 S_3 R_3) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} (A_1^2 (A_2 - A_3)^2 R_1^2 + A_2^2 (A_3 - A_1)^2 R_2^2 + A_3^2 (A_1 - A_2)^2 R_3^2).$$

При исследовании указанных интегрируемых случаев неоднократно приходится решать следующую задачу: нахождение критических точек функции, заданной на совместной поверхности уровня других функций, и вычисление индексов этих критических точек. Ниже описан один из возможных способов таких вычислений, который будет использован в дальнейшем.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы функции $h_0, h_1, \dots, h_m$, и пусть $M^{n-m} = \{h_1 = p_1, \dots, h_m = p_m\}$ — их неособая совместная поверхность уровня, т.е. $\text{grad } h_1, \dots, \text{grad } h_m$ линейно независимы в каждой точке $x \in M^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in M^{n-m}$ будет критической для функции $\tilde{h}_0 = h_0|_M$ тогда и только тогда, когда существует такой набор чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, что

$$\text{grad } h_0(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } h_i(x_0). \quad (I.20)$$

Рассмотрим матрицу

$$G = G_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i, \quad (I.21)$$

где G_i — гессиан функции h_i в точке x_0 , а λ_i берутся из (I.20). Гессиан функции в критической точке есть симметричная матрица, составленная из вторых частных производных функции. При заменах координат она меняется по тензорному закону и корректно определяет некоторую квадратичную форму на касательных векторах в критической точке. Число отрицательных собственных значений этой формы называется индексом критической точки, а число нулевых собственных значений — степенью вырождения критической точки [37].

Л е м м а I. Пусть для точки $x_0 \in M^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ выполнено условие (I.20). Тогда квадратичная форма, определяемая гессианом

функции $\tilde{h}_0 = h_0|_M$ в точке x_0 , есть ограничение формы, определяемой матрицей (I.2I), на касательное пространство $T_{x_0} M^{n-m}$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t) \in M^{n-m}$ произвольная гладкая кривая, такая что $\gamma(0) = x_0$. Тогда значение квадратичной формы, определяемой гессианом функции $\tilde{h}_0$, на векторе $\alpha = \dot{\gamma}(0) \in T_{x_0} M^{n-m}$ равно

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\alpha, \alpha) &= \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\tilde{h}_0(\gamma(t))) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (h_0(\gamma(t))) = \\ &= G_0(\alpha, \alpha) + \langle \text{grad } h_0(x_0), \ddot{\gamma}(0) \rangle = \\ &= G_0(\alpha, \alpha) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \text{grad } h_i(x_0), \ddot{\gamma}(0) \rangle = \\ &= G_0(\alpha, \alpha) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (h_i(\gamma(t))) - G_i(\alpha, \alpha) \right) \end{aligned}$$

$= G(\alpha, \alpha)$, т.к. $h_i(\gamma(t)) \equiv p_i$. Здесь через $G_i(\alpha, \alpha)$ обозначено значение квадратичной формы с матрицей G_i на векторе α , а через $\langle \text{grad } h_i(x_0), \ddot{\gamma}(0) \rangle$ обозначена обычная свертка в $\mathbb{R}^n$ вектора $\ddot{\gamma}(0)$ и ковектора $\text{grad } h_i(x_0)$. Лемма доказана.

Указанный способ вычислений удобен тем, что для нахождения индексов критических точек не надо вводить локальных систем координат на совместной поверхности уровня функций. Достаточно лишь выбрать некоторый базис в касательном пространстве к этой поверхности и вычислить значение формы (I.2I) на базисных векторах.

Второе простое утверждение, часто упрощающее исследование, заключается в следующем. Пусть, как и выше, в $\mathbb{R}^n$ заданы некоторые функции $h_1, \dots, h_m, f, g$ и $M = \{h_1 = p_1, \dots, h_m = p_m\}$ — неособая совместная поверхность уровня функций $h_1, \dots, h_m$. Рассмотрим отображение $\tilde{f} \times \tilde{g}: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\tilde{f} = f|_M$, $\tilde{g} = g|_M$, $\tilde{f} \times \tilde{g}(x) = (\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) \in \mathbb{R}^2$. Пусть K — множество критических

точек отображения $\tilde{f} \times \tilde{g}$, а $\gamma(t) \in K$ — некоторая гладкая кривая, причем $\text{grad } \tilde{f} \neq 0$ во всех точках кривой $\gamma(t)$. Отображение $\tilde{f} \times \tilde{g}$ переводит кривую $\gamma(t)$ в некоторую кривую $(\alpha(t), \beta(t))$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где $\alpha(t) = f(\gamma(t))$, $\beta(t) = g(\gamma(t))$. Так как каждая точка кривой $\gamma(t)$ является критической для отображения $\tilde{f} \times \tilde{g}$, а $\text{grad } \tilde{f} \neq 0$ в точках кривой, то существуют однозначно определенные функции $\lambda(t)$, $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_m(t)$, такие что

$$\text{grad } g(\gamma(t)) = \lambda(t) \cdot \text{grad } f(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \cdot \text{grad } h_i(\gamma(t)). \quad (I.22)$$

Л е м м а 2. Для любого значения t параметра кривой $\gamma(t)$ верно следующее соотношение:

$$\frac{d\beta}{dt} = \lambda(t) \frac{d\alpha}{dt}, \quad (I.23)$$

где $\lambda(t)$ есть коэффициент при $\text{grad } f$ в разложении $\text{grad } g$ (I.22).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямыми вычислениями получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \frac{d}{dt} (g(\gamma(t))) = \langle \text{grad } g(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \\ &= \lambda(t) \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \langle \text{grad } h_i(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \\ &= \lambda(t) \cdot \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \cdot \frac{d}{dt} (h_i(\gamma(t))) = \lambda(t) \cdot \frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned}$$

так как $h_i(\gamma(t)) \equiv p_i$. Лемма доказана.

Указанное в лемме соотношение (I.23) позволяет устанавливать качественный вид кривой $(\alpha(t), \beta(t))$. Например, знак производной $\frac{d\lambda}{dt}$ определяет выпуклость кривой, в частности, в точках перегиба $\frac{d\lambda}{dt} = 0$.

§ 2. Топологический тип изоэнергетических поверхностей.

В этом параграфе будет дано описание топологического типа изоэнергетических поверхностей для интегрируемых случаев, перечисленных в §1.

Изоэнергетическая поверхность Q^3 есть совместная поверхность уровня функций f_1 , f_2 , H , заданных на $\mathbb{R}^6(S, R)$, где $f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$, $f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3$, а H — гамильтониан. Поскольку мы считаем, что $f_1 = 1$, то различные поверхности Q^3 задаются двумя параметрами g и h (значения функций f_2 и H). Описание топологического типа Q^3 будет дано в следующем виде: на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ нарисуем кривые, разбивающие плоскость на области таким образом, что для всех точек (g, h) из одной области топологический тип соответствующих изоэнергетических поверхностей $Q^3 = \{f_1 = 1, f_2 = g, H = h\}$ будет одним и тем же.

Эти кривые никак не связаны с интегрируемостью системы и могут быть построены для произвольных гамильтонианов. Такой способ исследования механических систем был предложен С.Смейлом [15]. Он заключается в следующем. Пусть $S^2 \times \mathbb{R}^3 = \{f_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$. Рассмотрим отображение $F = f_2 \times H: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(g, h)$, заданное формулой $F(P) = (f_2(P), H(P)) \in \mathbb{R}^2(g, h)$, где $P \in S^2 \times \mathbb{R}^3$. (Для функций $f_2|_{S^2 \times \mathbb{R}^3}$ и $H|_{S^2 \times \mathbb{R}^3}$ мы сохраняем обозначения f_2 и H). Образ множества критических точек отображения F есть некоторое подмножество Σ в $\mathbb{R}^2(g, h)$, называемое бифуркационной диаграммой. Полный прообраз любой точки $(g, h) \notin \Sigma$ есть неособая изоэнергетическая поверхность $Q^3 = \{f_1 = 1, f_2 = g, H = h\}$, что следует из теоремы о неявной функции. Для гамильтонианов вида (1.9) (а только такие мы и будем рассматривать) отображение F будет собственным (т.е. прообраз любого компакта есть компакт). Поэтому из теории Морса (см., например, [37]) следует, что для

всех точек (g, h) , принадлежащих одной связной компоненте множества $\mathbb{R}^2(g, h) \setminus \Sigma$, топологический тип Q^3 будет одним и тем же. Таким образом, построив бифуркационную диаграмму отображения F и указав топологический тип Q^3 для каждой из областей, на которые Σ разбивает $\mathbb{R}^2(g, h)$, мы получим полное описание неособых изоэнергетических поверхностей исследуемой гамильтоновой системы.

В работах [16-18] было проведено исследование топологии Q^3 (по изложенной выше схеме) для задач о движении твердого тела с закрепленной точкой. В этих работах построены бифуркационные диаграммы отображения $f_2 \times H$ для гамильтонианов достаточно общего вида (вообще говоря, неинтегрируемых), частными случаями которых являются интегрируемые случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Приведем здесь подробное описание этих бифуркационных диаграмм именно для интегрируемых случаев.

Случай Эйлера. Бифуркационная диаграмма отображения $f_2 \times H$ для гамильтониана $H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3}$ имеет простой вид (см. Рис. I).

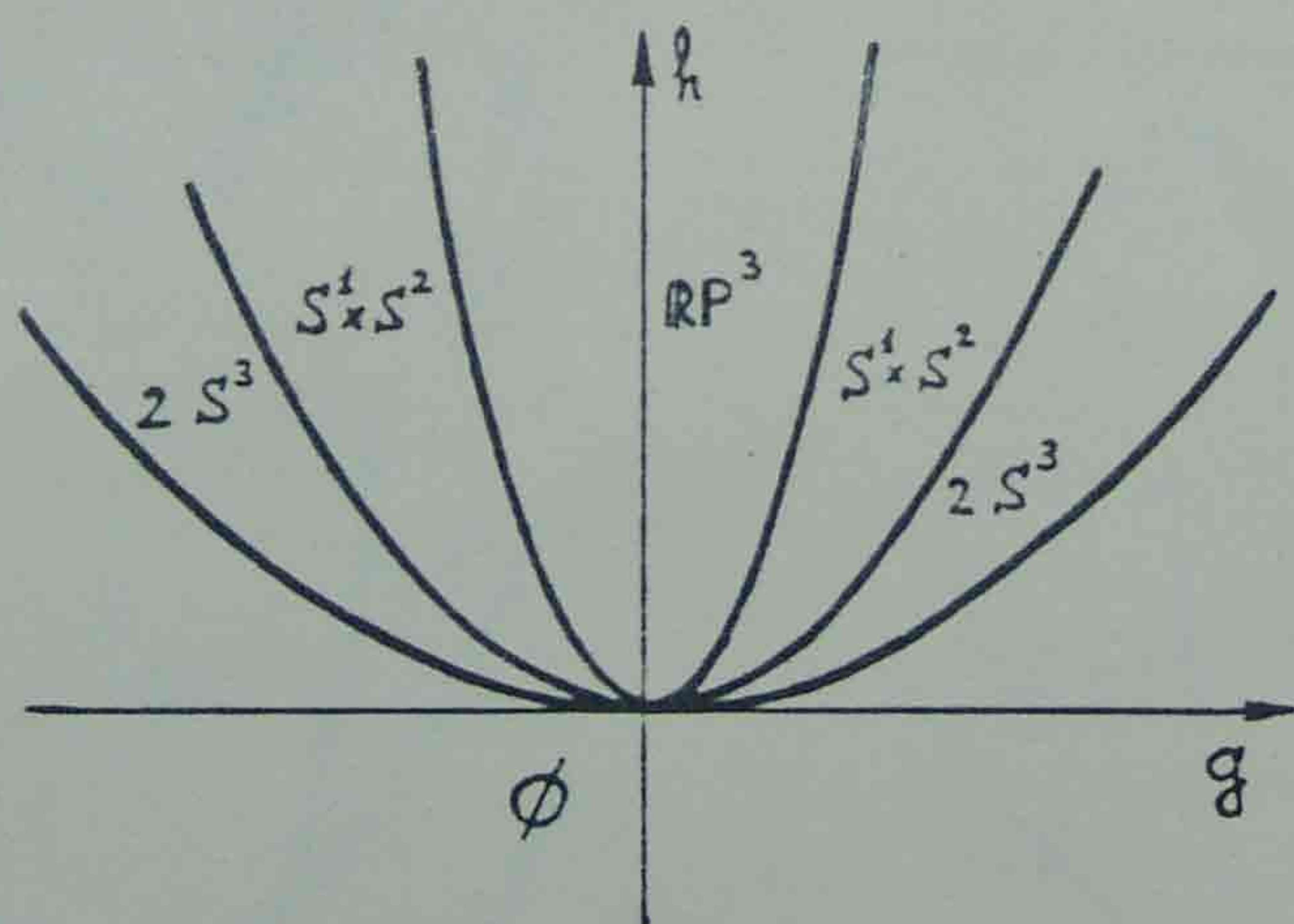


Рис. 1

Она состоит из трех парабол $h = \frac{g^2}{2A_i}$ ($i=1, 2, 3$), разбивающих плоскость $\mathbb{R}^2(g, h)$ на 6 областей. В каждой из областей на Рис. I указан топологический тип Q^3 (знак $\emptyset$ означает, что для всех

точек (q, h) из данной области $(\mathbb{P}^3 \times H)^{-1}(q, h) = \emptyset$. На Рис. I изображен случай, когда $0 < A_1 < A_2 < A_3$. Если $0 < A_1 = A_2 < A_3$, то две верхние параболы сливаются в одну. Если $0 < A_1 < A_2 = A_3$, то сливаются две нижние параболы. При $A_1 = A_2 = A_3$ гамильтониан случая Эйлера становится резонансным, поскольку для него существуют два функционально независимых интеграла, например, S_1 и S_2 . Такие случаи в дальнейшем мы не рассматриваем.

Случай Лагранжа. Для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + R_3,$$

где $\beta > 0$, бифуркационные диаграммы качественно отличаются в следующих случаях: (a) $0 < \beta < 1$; (b) $\beta = 1$; (c) $1 < \beta \leq \frac{4}{3}$; (d) $\beta > \frac{4}{3}$. Они изображены на Рис. 2.

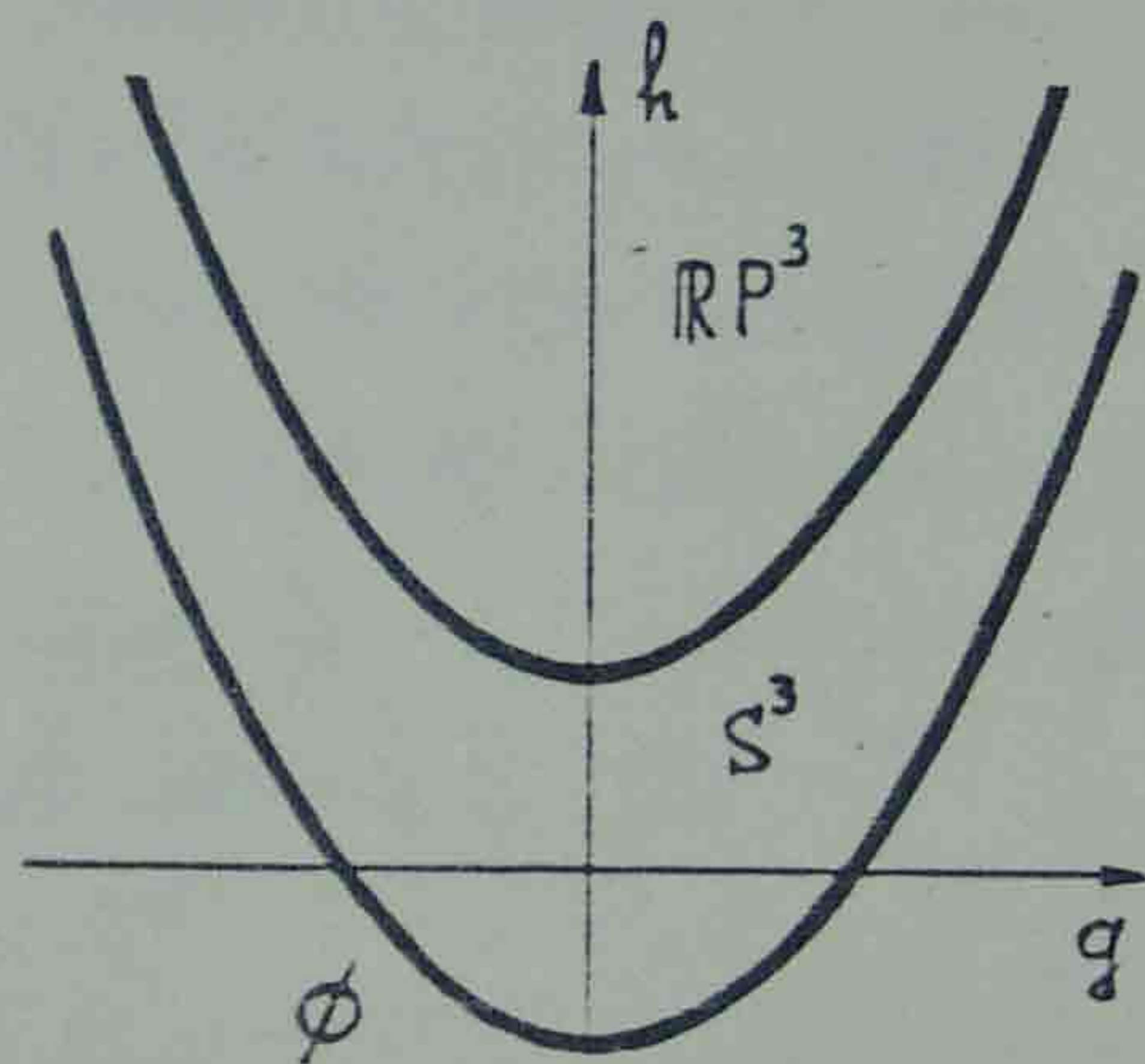
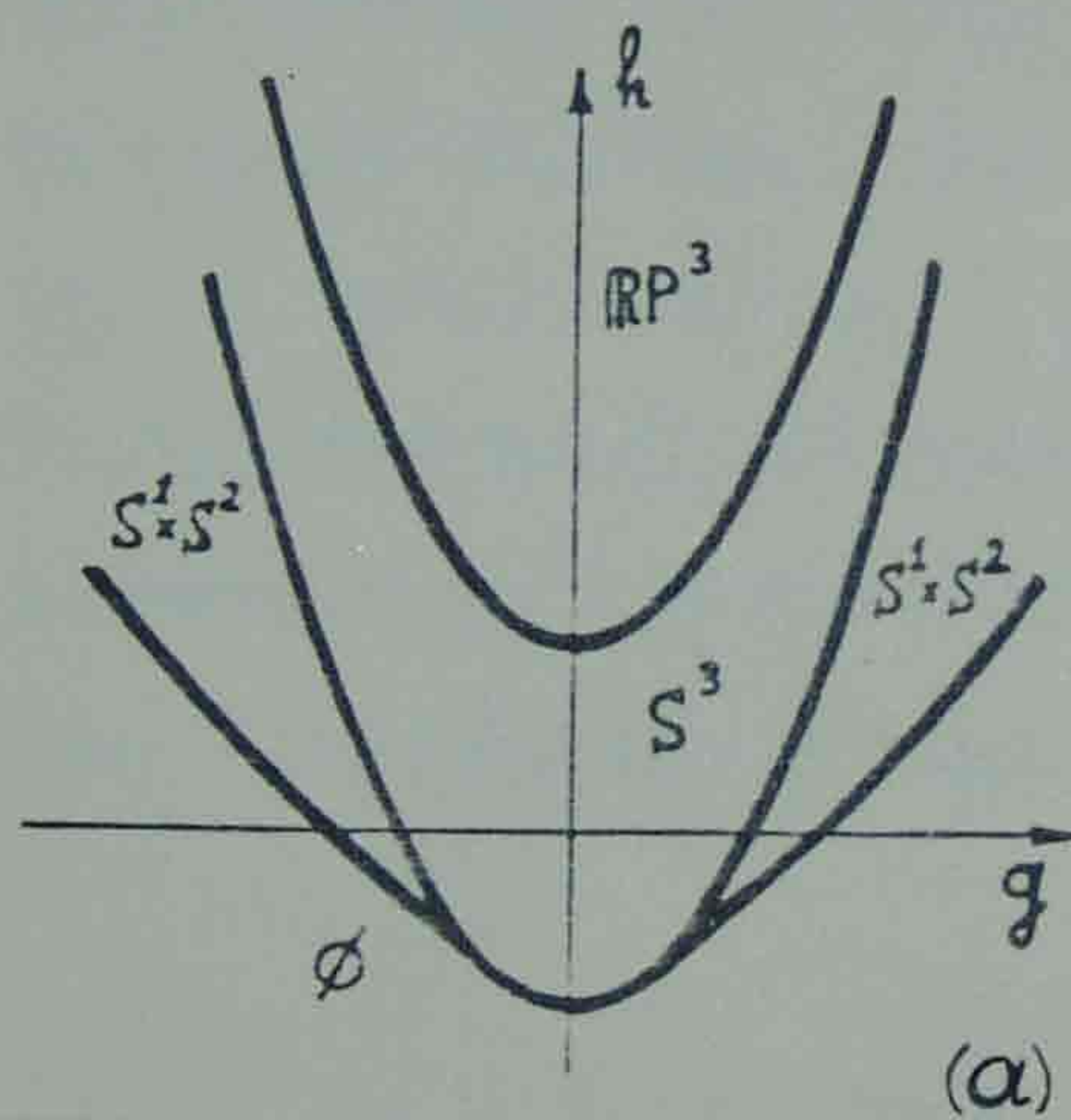
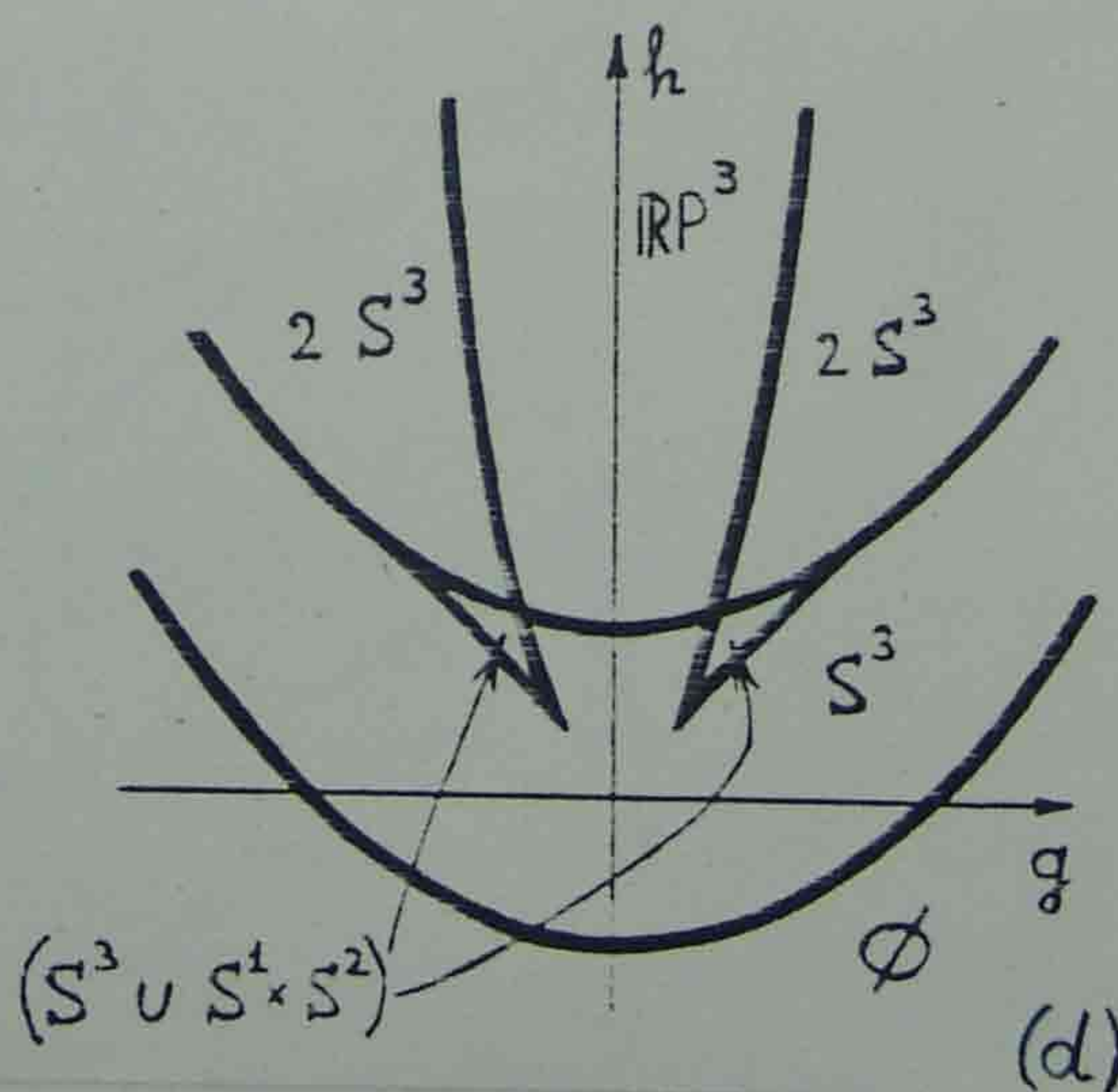
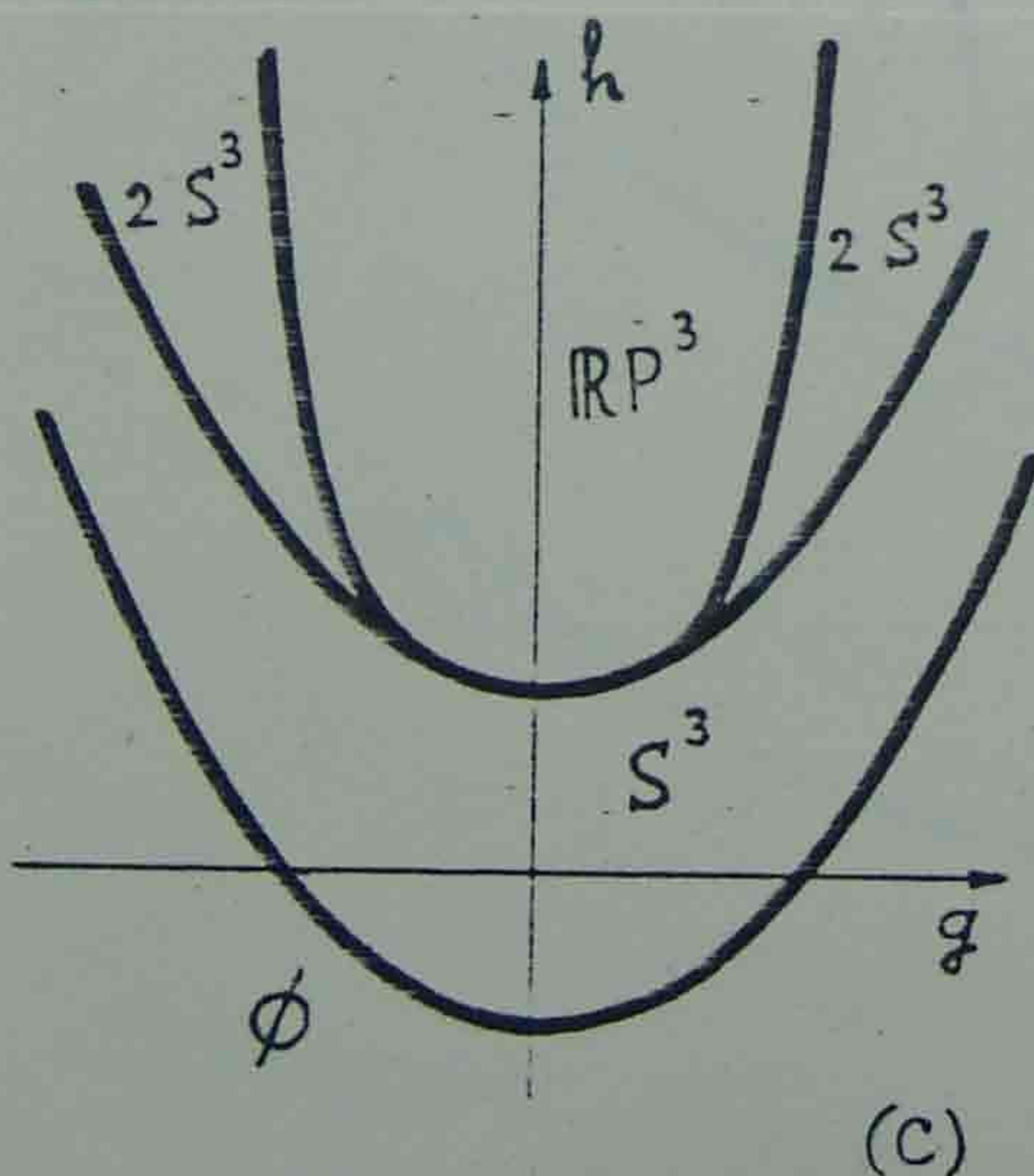


Рис. 2



Все диаграммы состоят из двух парабол $h = \frac{g^2}{2\beta} \pm 1$ и кривой (при $\beta \neq 1$), которую можно задать параметрически следующим образом:

$$g = t + \frac{1}{(\beta-1)t^3}, \quad h = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2(\beta-1)t^2}, \quad t^2 \geq \frac{1}{|\beta-1|}.$$

Эта кривая касается одной из парабол в точках $\left(\frac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta}}, \frac{3\beta-2}{2|1-\beta|}\right) \in \mathbb{R}^2(g, h)$ и при $\beta > \frac{4}{3}$ имеет две точки возврата с координатами $\left(\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{\beta-1}}, \sqrt{\frac{3}{\beta-1}}\right)$. Топологический тип Q^3 указан на Рис. 2 ($S^3 \cup S^1 \times S^2$ означает несвязное объединение S^3 и $S^1 \times S^2$).

Случай Ковалевской. Для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2) + R_1 \quad (2.1)$$

бифуркационные диаграммы имеют в точности такой же вид, что и для случая Лагранжа. Они получаются из диаграмм, изображенных на Рис. 2, сжатием по оси g в $\sqrt{\beta}$ раз. Однако топологический тип изоэнергетических поверхностей будет другим. Гамильтониан (2.1) соответствует случаю Ковалевской при $\beta = 2$, поэтому на Рис. 3 приведена бифуркационная диаграмма лишь для $\beta > \frac{4}{3}$.

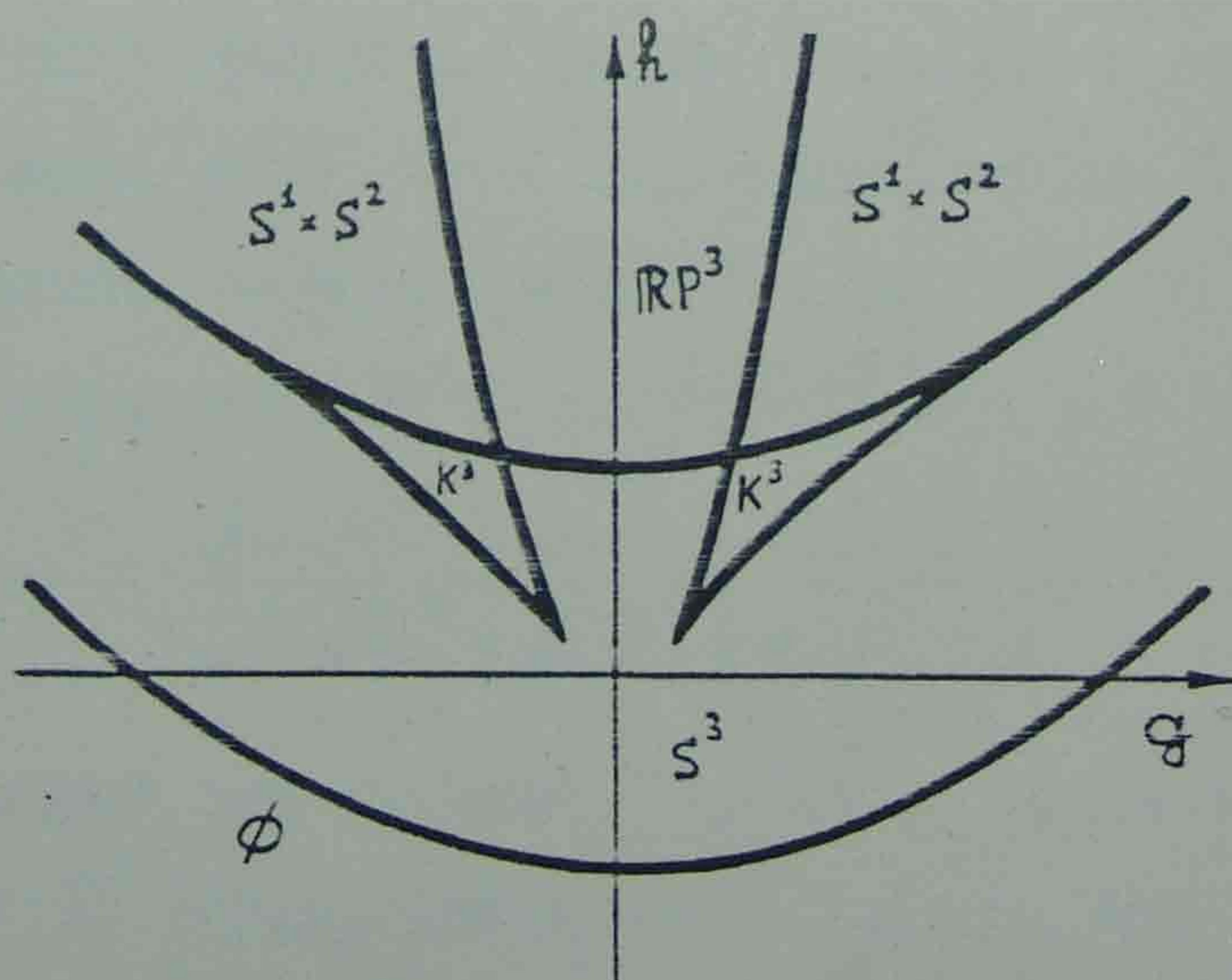


Рис. 3

При $\beta=2$ координаты точек касания кривой и параболы: $(\pm \sqrt{2}, 2)$; координаты точек возврата кривой: $(\pm (\frac{4}{3})^{3/4}, \sqrt{3})$; координаты точек, в которых кривая трансверсально пересекает параболу:

$(\pm 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, 2\sqrt{2}-1)$. Топологический тип Q^3 указан на Рис. 3. Поверхность, обозначенную K^3 , можно описать следующим образом: рассмотрим подрасслоение расслоения единичных касательных векторов к двумерной сфере, база B_3 которого есть сфера с тремя дырками (т.е. из S^2 выброшено три открытых непересекающихся диска), а затем каждый слой над границей базы B_3 отождествим в точку. Полученное трехмерное многообразие и обозначено через K^3 . Отметим, что таким же способом, рассматривая базу B_m (S^2 с m дырками), можно получить RP^3 (при $m=0$), S^3 (при $m=1$), $S^1 \times S^2$ (при $m=2$). Можно также показать, что получающиеся при этом многообразия для $m \geq 2$ гомеоморфны связной сумме $(m-1)$ экземпляра $S^1 \times S^2$, в частности $K^3 = (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$.

На самом деле, такое описание изоэнергетических поверхностей для гамильтонианов вида (1.9) получается естественным образом.

Рассмотрим проекцию на сферу Пуассона $\pi: TS^2 \rightarrow S^2$, где $TS^2 = \{f_1=1, f_2=g\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$, $S^2 = \{f_1=1\} \subset \mathbb{R}^3(R)$. При проекции π изоэнергетическая поверхность $Q_h^3 = \{f_1=1, f_2=g, H=h\}$ проектируется в некоторое замкнутое подмножество N на сфере Пуассона, причем, если z — внутренняя точка N , то $\pi^{-1}(z) \cap Q_h^3$ есть окружность, а если $z \in \partial N$, то $\pi^{-1}(z) \cap Q_h^3$ есть точка. Легко показать, что $N = \{R \in S^2 \subset \mathbb{R}^3(R) / \varphi_g(R) \leq h\}$, где

$$\varphi_g(R) = \frac{(g + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3)^2}{2(A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2)} + u(R). \quad (2.2)$$

Используя явный вид функции $\varphi_g(R)$, можно установить вид множества $N \subset S^2$ (т.е. найти число дырок), что позволяет определить топологический тип Q^3 (как отмечено выше, это RP^3 , S^3 или $\#_{i=1}^m S^1 \times S^2$). Этот метод был разработан в [15] для натуральных

механических систем (случай систем с гироскопическими силами рассмотрен в [6]). Функция $\psi_g(R)$ есть аналог приведенного потенциала, рассматриваемого в [15].

Как отмечалось выше, описанные диаграммы для случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской являются частными случаями диаграмм, построенных в [16-18]. Перейдем теперь к исследованию топологического типа Q^3 для остальных интегрируемых случаев, перечисленных в §1.

Случай Жуковского. Будем предполагать, что параметры гамильтониана случая Жуковского

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3}$$

удовлетворяют условиям: $0 < A_1 < A_2 < A_3$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Критические точки отображения $f_2 \times H: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ определяются из условия

$$\begin{cases} \text{grad } H = \mu_1 \text{ grad } f_1 + \mu_2 \text{ grad } f_2 \\ f_1 = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

где μ_1, μ_2 — некоторые числа. Вводя вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$, $R = (R_1, R_2, R_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и матрицу $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, запишем систему (2.3) в векторной форме:

$$\begin{cases} A^{-1}(S + \lambda) = \mu_2 R \\ 2\mu_1 R + \mu_2 S = 0 \\ (R, R) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Если $\mu_2 = 0$, то $\mu_1 = 0$, так как $R \neq 0$. Получаем следующее решение системы (2.4):

$$S = -\lambda, \quad (R, R) = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (2.5)$$

Множество (2.5) есть двумерная сфера в $\mathbb{R}^6(S, R)$. В точках этой

сферы значение гамильтониана равно нулю, а значение функции f_2 равно $g = -(\lambda, R)$. Следовательно, образ множества (2.5) при отображении $f_2 \times H$ есть отрезок $\{h=0, |g| \leq \sqrt{(\lambda, \lambda)}\}$ на координатной оси $h=0$ в плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$. Прообраз каждой внутренней точки этого отрезка есть окружность, минимальная для функции $\tilde{H} = H|_{\{f_1=1, f_2=g\}}$, где $|g| \leq \sqrt{(\lambda, \lambda)}$.

Пусть теперь в системе (2.4) $\mu_2 \neq 0$. Тогда

$$S = -\frac{2\mu_1}{\mu_2} R. \quad (2.6)$$

Поскольку $(S, R) = g$, то из (2.6) получаем, что $g = (S, R) = (-\frac{2\mu_1}{\mu_2} R, R) = -\frac{2\mu_1}{\mu_2}$, откуда $S = gR$. Подставляя в первое уравнение системы (2.4) $S = gR$, получаем

$$(\mu_2 A - g) R = \lambda. \quad (2.7)$$

Учитывая (2.6) и (2.7), решение системы (2.4) можно записать в следующем виде:

$$S_i = \frac{\lambda_i g}{A_i t - g}, \quad R_i = \frac{\lambda_i}{A_i t - g} \quad (i=1, 2, 3); \quad (2.8)$$

$$\mu_1 = -\frac{gt}{2}, \quad \mu_2 = t,$$

где t — некоторый параметр, а зависимость $g(t)$ определяется уравнением

$$\frac{\lambda_1^2}{(A_1 t - g)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(A_2 t - g)^2} + \frac{\lambda_3^2}{(A_3 t - g)^2} = 1. \quad (2.9)$$

Гамильтониан H в точках (2.8) принимает значения

$$h = \frac{t^2}{2} \left(\frac{\lambda_1^2 A_1}{(A_1 t - g)^2} + \frac{\lambda_2^2 A_2}{(A_2 t - g)^2} + \frac{\lambda_3^2 A_3}{(A_3 t - g)^2} \right). \quad (2.10)$$

Таким образом, для любых значений t и g , удовлетворяю-

щих условию (2.9), мы получаем ровно одну точку (2.8), в которой градиенты функций f_2 и H зависимы. Образ этой точки при отображении $f_2 \times H$ есть точка с координатами $(g, h) \in \mathbb{R}^2$, где h определяется формулой (2.10). Итак, нам надо построить кривую $(g(t), h(t))$ на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$, заданную неявно формулами (2.9), (2.10).

Из Леммы 2 (§1) следует, что $\frac{dh}{dt} = t \frac{dg}{dt}$. Поэтому достаточно построить кривую (2.9) на плоскости $\mathbb{R}^2(t, g)$. Вводя полярные координаты $t = z \cos \varphi$, $g = z \sin \varphi$, из (2.9) получаем зависимость z от φ :

$$z = \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{(A_1^2 + 1) \sin^2(\varphi - \varphi_1)} + \frac{\lambda_2^2}{(A_2^2 + 1) \sin^2(\varphi - \varphi_2)} + \frac{\lambda_3^2}{(A_3^2 + 1) \sin^2(\varphi - \varphi_3)}},$$

где $\operatorname{tg} \varphi_i = A_i$ ($i = 1, 2, 3$). Кривая, определяемая этим соотношением, изображена на Рис. 4. Она центрально симметрична относительно начала координат и имеет асимптоты $g = A_i t \pm \lambda_i$, отмеченные на Рис. 4 пунктиром.

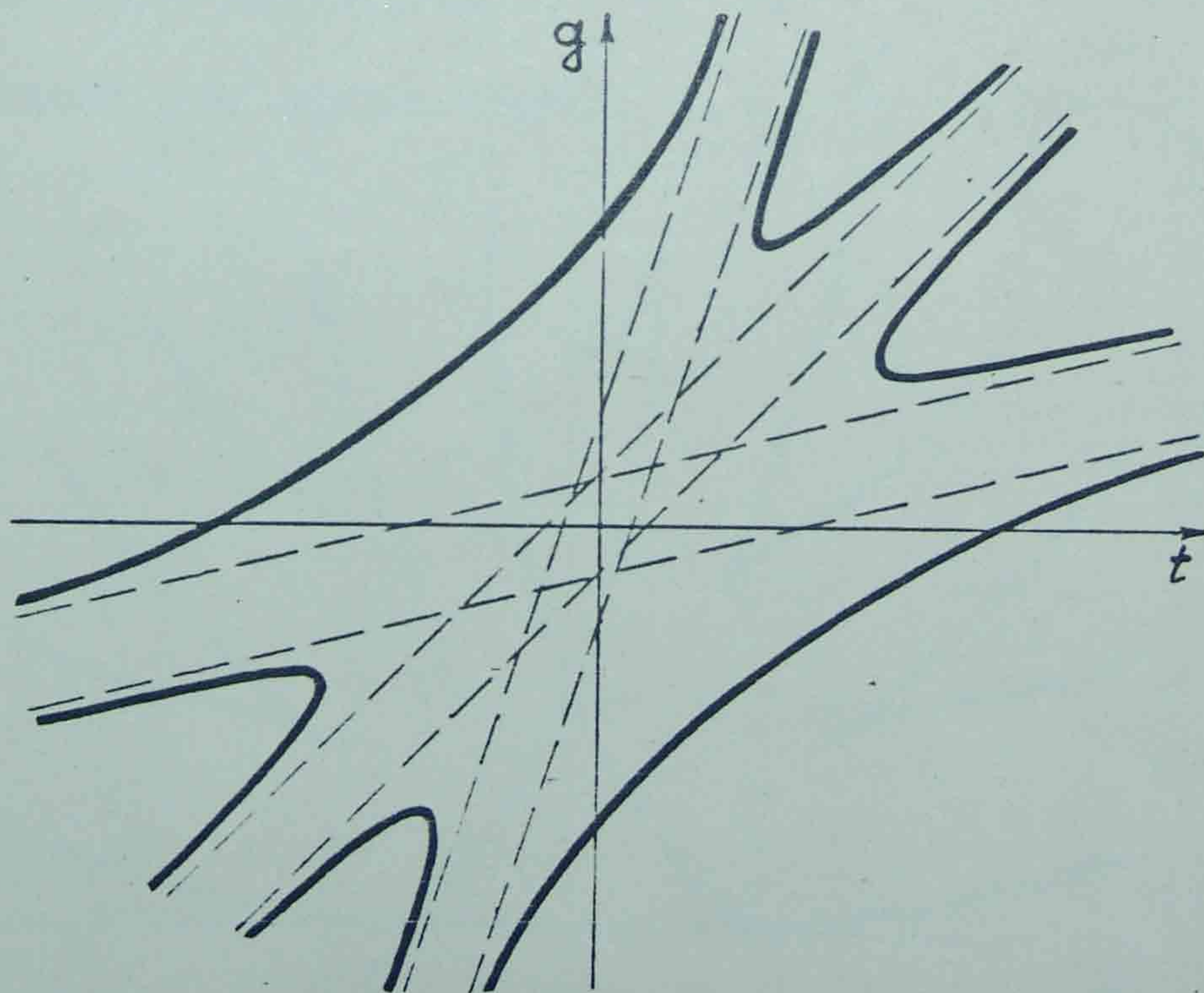


Рис. 4

Формула (2.10) задает отображение этой кривой в плоскость $\mathbb{R}^2(q, h)$. Учитывая соотношение $\frac{dh}{dt} = t \frac{dq}{dt}$, легко понять, что локальным минимумам и максимумам функции $q(t)$ (см. Рис. 4) соответствуют точки возврата бифуркационной кривой, а локальным минимумам и максимумам обратной функции $t(q)$ — точки перегиба бифуркационной кривой. Если точка, двигаясь по кривой, изображенной на Рис. 4, асимптотически стремится (при $t \rightarrow \infty$) к прямой $q = A_i t \pm \lambda_i$, то образ этой точки на бифуркационной кривой асимптотически стремится к параболе

$$h = \frac{(q \mp \lambda_i)^2}{2A_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_j^2 A_j}{(A_j - A_i)^2} + \frac{\lambda_k^2 A_k}{(A_k - A_i)^2} \right),$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Бифуркационная диаграмма отображения $f_2 \times H$ для гамильтониана случая Жуковского есть объединение построенной кривой с отрезком $\{h=0, |q| \leq \sqrt{(\lambda, \lambda)}\}$. Она изображена на Рис. 5. Диаграмма симметрична относительно прямой $q=0$. Точки касания отрезка с кривой имеют координаты $(\pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, 0) \in \mathbb{R}^2(q, h)$, а точка пересечения двух ветвей кривой — $(0, \frac{\lambda_1^2}{2A_1} + \frac{\lambda_2^2}{2A_2} + \frac{\lambda_3^2}{2A_3}) \in \mathbb{R}^2(q, h)$.

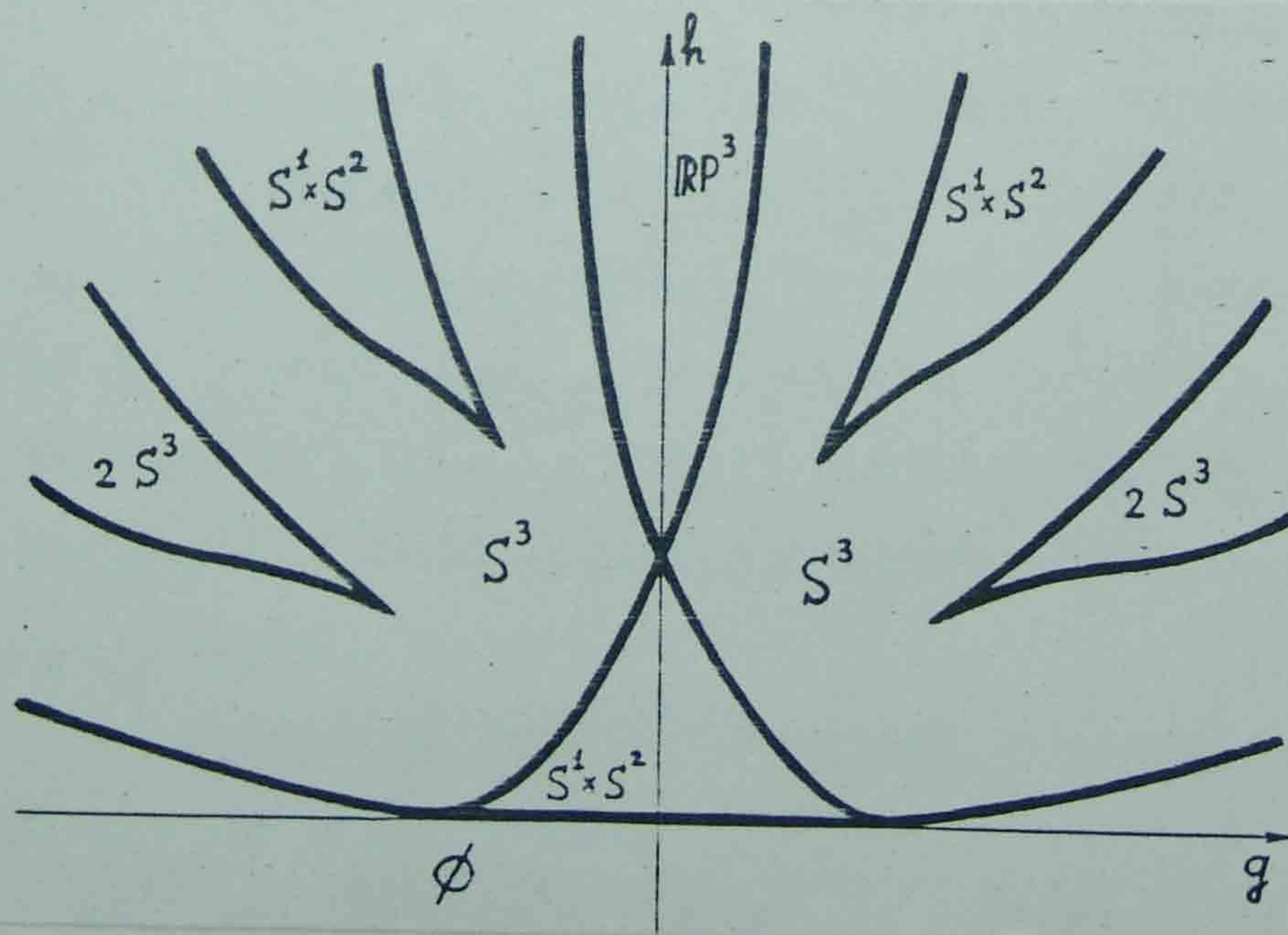


Рис. 5

Топологический тип Q_h^3 в каждой из областей можно определить, рассматривая проекцию Q_h^3 на сферу Пуассона, методом работы [15]. То же самое можно получить другим способом. Заменим λ_i на $\lambda'_i = \alpha \lambda_i$ и устремим α к нулю. В пределе бифуркационная диаграмма, изображенная на Рис. 5, переходит в бифуркационную диаграмму для гамильтониана случая Эйлера, изображенную на Рис. I (стр. 27). При этом неограниченные области на Рис. 5, для которых топологический тип Q_h^3 есть $2S^3$, $S^1 \times S^2$, RP^3 , переходят в соответствующие области на Рис. I. В "треугольнике" около начала координат на Рис. 5 топологический тип Q_h^3 есть $S^1 \times S^2$, а в граничащих с ним областях - S^3 . Это следует из теории Морса, поскольку в прообразе каждой точки отрезка лежит ровно одна минимальная окружность функции $\tilde{H} = H|_{\{f_1=1, f_2=q\}}$, а в прообразе других точек границы образа TS^2 - ровно одна минимальная критическая точка.

Случай Сретенского. Рассмотрим теперь гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + 4(S_3 + \lambda)^2) + R_1. \quad (2.II)$$

Дополнительный интеграл для него существует лишь на поверхности $\{f_1=1, f_2=0\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$. Поэтому для описания инвариантов этого интегрируемого случая нет необходимости изучать отображение $f_2 \times H$. Топологический тип Q^3 и инвариант Фоменко для Q^3 будут в данном случае зависеть от значения параметра λ и значения h , определяющего поверхность $Q_h^3 = \{f_1=1, f_2=0, H=h\}$. Поэтому для гамильтониана (2.II) мы построим разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$ и определим топологический тип Q^3 в каждой из областей.

Топологический тип Q^3 определим, проектируя Q^3 на сферу Пуассона. Для гамильтониана (2.II) функция (2.2) имеет вид:

$$\varphi_0(R) = \frac{2\lambda^2 R_3^2}{4-3R_3^2} + R_1 \quad (2.12)$$

Для того, чтобы определить вид областей

$$\varphi_0(R) \leq h, \quad (2.13)$$

найдем критические точки функции (2.12), заданной на сфере $\{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3(R)$. Они определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R_i} = 2\mu R_i & (i=1, 2, 3) \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \end{cases}$$

Ее решениями являются две критические точки, существующие при любом значении λ :

$$R_1 = \pm 1, \quad R_2 = R_3 = 0, \quad \mu = \pm \frac{1}{2}; \quad (2.14)$$

а также две критические точки, зависящие от значения λ :

$$R_1 = \frac{1}{2\zeta}, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4\zeta^2}}, \quad \mu = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.15)$$

где $\lambda^2 = \frac{(4\zeta^2 + 3)^2}{128\zeta^3}, \quad \zeta \geq \frac{1}{2}.$

В точках (2.14) значение функции (2.12) равно $\varphi_0(R) = \pm 1$. Так как λ произвольно, то мы получаем на плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$ две прямые $h = \pm 1$, разделяющие области с различным топологическим типом Q^3 . В точках (2.15) значение функции (2.12) равно

$$\varphi_0(R) = \frac{16\zeta^4 + 40\zeta^2 - 3}{64\zeta^3}.$$

Таким образом, эти точки определяют на плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$ разделяющую кривую, заданную параметрически:

$$h = \frac{16\zeta^4 + 40\zeta^2 - 3}{64\zeta^3}, \quad \lambda^2 = \frac{(4\zeta^2 + 3)^2}{128\zeta^3}, \quad \zeta \geq \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

Объединяя прямые $h = \pm 1$ и кривую (2.16), получаем диаграмму плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$, изображенную на Рис. 6. Она симметрична относительно прямой $\lambda = 0$. Координаты точек возврата кривой (2.16): $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{9}) \in \mathbb{R}^2(\lambda, h)$; координаты точек касания прямой $h = 1$ и кривой: $(\pm 1, 1) \in \mathbb{R}^2(\lambda, h)$. Кривая (2.16) асимптотически стремится к параболе $h = \lambda^2$.

Каждой точке прямых $h = \pm 1$ соответствует ровно одна критическая точка функции (2.12), а каждой точке кривой — ровно две критические точки. Вычислив их индексы, получим: для прямой $h = -1$ индекс равен 0; для прямой $h = 1$ индекс равен 2 на отрезке между точками касания с кривой и индекс равен 1 на остальной части прямой; для кривой индекс равен 1 на участках между точкой возврата и точкой касания с прямой и индекс равен 2 на остальной части кривой. Зная индексы критических точек, несложно установить вид областей (2.13) на сфере Пуассона: это $\emptyset$, диск D^2 , кольцо $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (диск D^2 с одной дыркой), диск D^2 с двумя дырками, вся сфера S^2 . Соответствующие им поверхности Q^3 указаны на Рис. 6. Через K^3 обозначена та же поверхность, что и для гамильтониана (2.1).

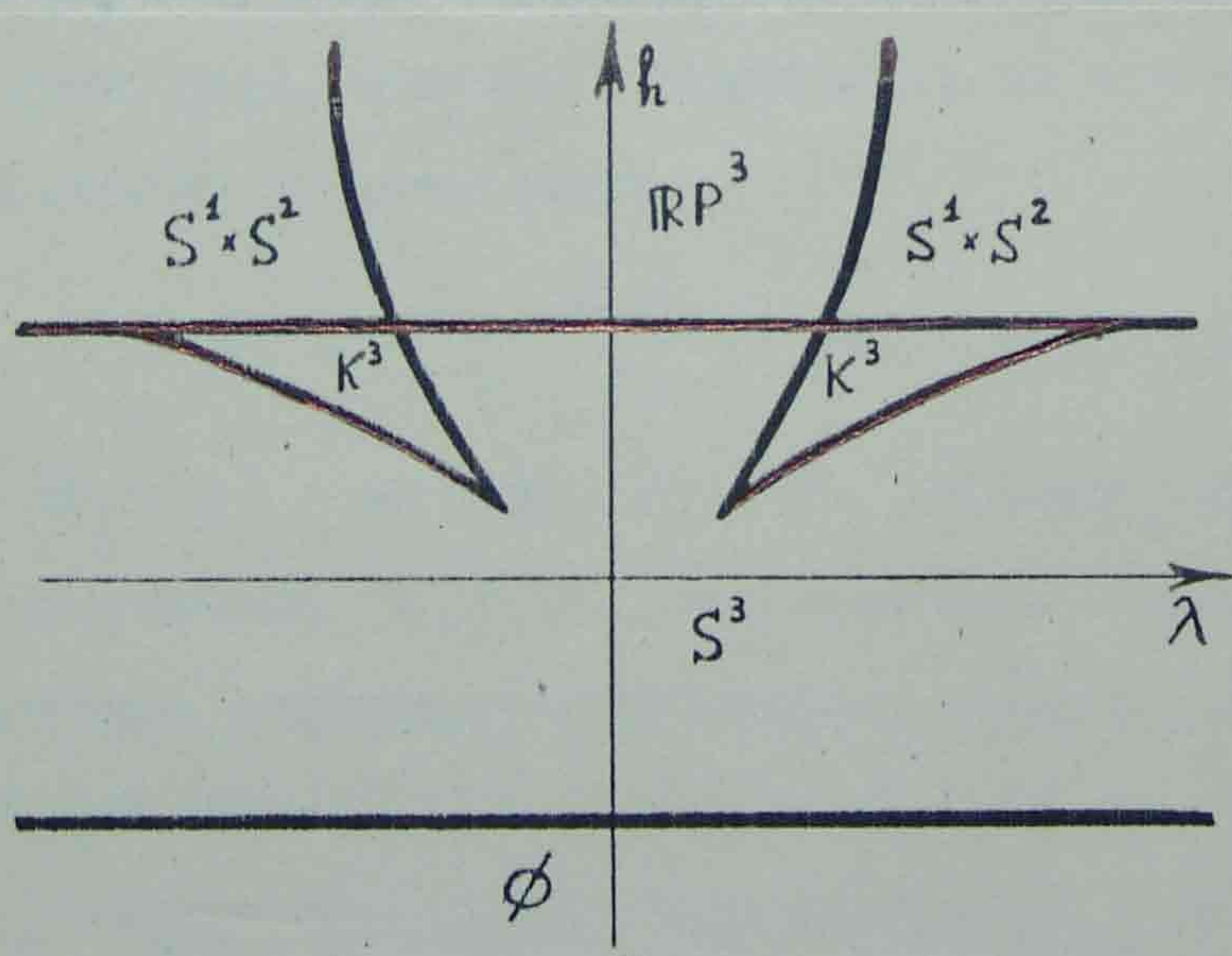


Рис. 6

Случай Клебша. Построим бифуркационные диаграммы отображения $f_2 \times H$ для

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3} + \frac{\sigma}{2} (A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2),$$

где $0 < A_1 < A_2 < A_3$, $\sigma = \pm 1$. Условие

$$\text{grad } H = \mu_1 \text{grad } f_1 + \mu_2 \text{grad } f_2,$$

определяющее критические точки отображения $f_2 \times H : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 & -\mu_2 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & \sigma A_1 - 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & \sigma A_2 - 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & \sigma A_3 - 2\mu_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

Так как $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$, то равенство (2.17) верно лишь в том случае, если определитель матрицы, входящей в это равенство, равен нулю. Матрица распадается на три блока размера 2×2 , определители которых равны

$$\Phi_i = \sigma - \frac{2\mu_1}{A_i} - \mu_2^2 \quad (i=1, 2, 3). \quad (2.18)$$

Если $\Phi_i \neq 0$, то $S_i = R_i = 0$. Поэтому, если выполнено лишь одно из условий $\Phi_i = 0$, то, учитывая равенство $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$, мы получаем следующие критические точки: $(t_1, 0, 0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, t_2, 0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, t_3, 0, 0, \pm 1) \in \mathbb{R}^6(S, R)$, где t_1, t_2, t_3 — некоторые параметры.

Вычисляя значения функций f_2 и H в этих точках, мы полу-

чаем на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ три параболы

$$h = \frac{g^2}{2A_i} + \frac{\sigma A_i}{2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.19)$$

В прообразе каждой точки парабол (2.19) лежат ровно две критические точки отображения $f_2 \times H$. Так как $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$, то в случае $\sigma = -1$ никакие два из определителей (2.18) не равны нулю одновременно. Поэтому для $\sigma = -1$ мы получаем бифуркационную диаграмму, состоящую из трех непересекающихся парабол (2.19). Она изображена на Рис. 7.

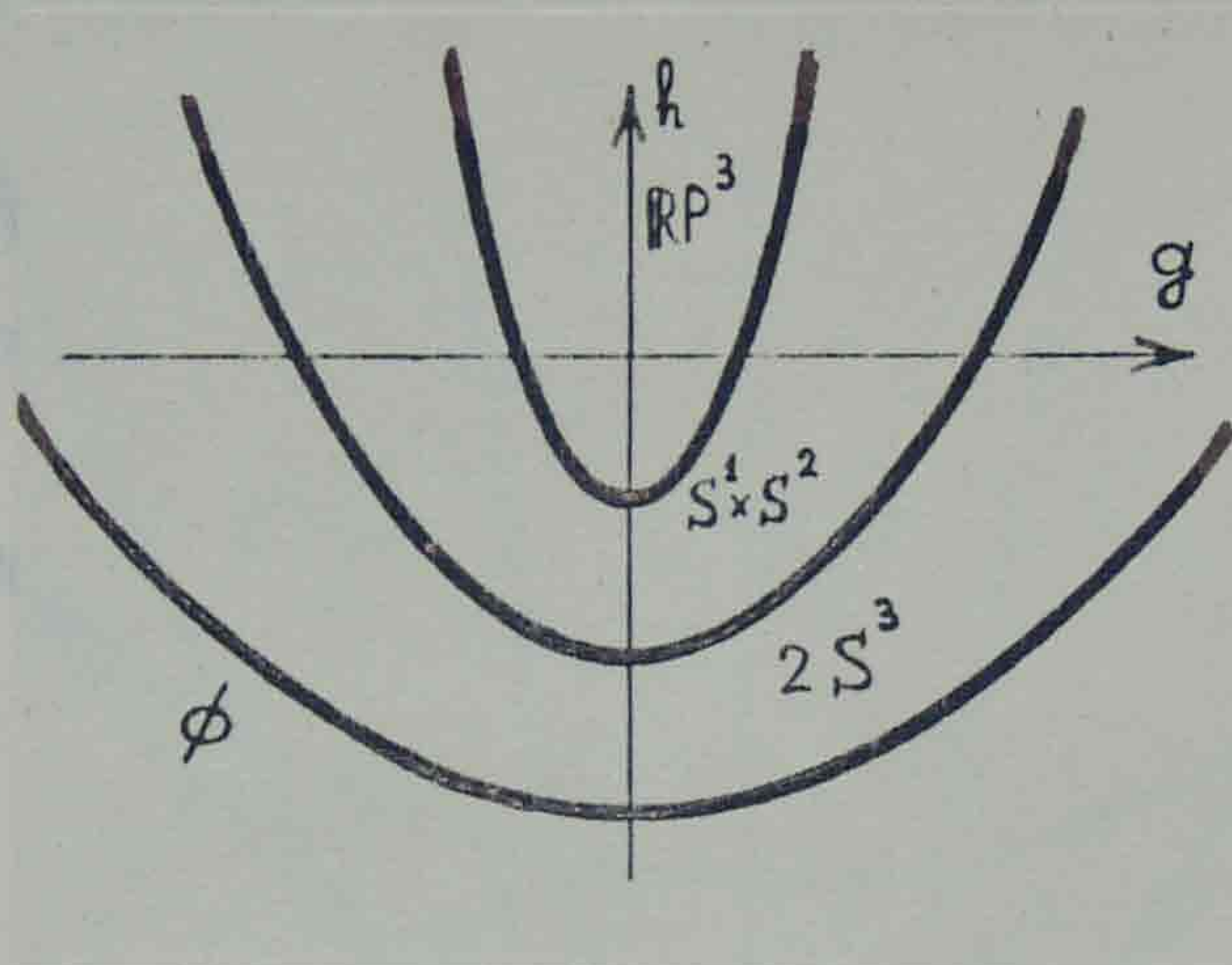


Рис. 7

Рассмотрим случай $\sigma = 1$. Тогда из равенства нулю любых двух определителей (2.18) следует, что $\mu_1 = 0$, $\mu_2^2 = 1$. Поэтому равен нулю и третий определитель. Из (2.17) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_i = \pm A_i R_i \\ (i=1, 2, 3) \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Уравнения 2.20 определяют в $\mathbb{R}^6(S, R)$ две двумерные сферы, целиком заполненные критическими точками отображения $f_2 \times H$. Значения функций f_2 и H на множестве (2.20) равны $g = \pm (A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2)$ и $h = A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2$. Таким образом, при

отображении $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}$ двумерные сферы (2.20) отображаются в два отрезка

$$\{h = |g|, A_1 \leq |g| \leq A_3\} \subset \mathbb{R}^2(g, h). \quad (2.21)$$

Прообраз каждой точки этих отрезков есть две окружности, заполненные критическими точками.

Объединяя параболы (2.19) (при $\beta = 1$) и отрезки (2.21), получаем бифуркационную диаграмму, изображенную на Рис. 8. Отрезки (2.21) касаются всех трех парабол в точках $(\pm A_i, A_i) \in \mathbb{R}^2(g, h)$. Параболы (2.19) пересекаются в точках $(\pm \sqrt{A_i A_j}, \frac{A_i + A_j}{2}) \in \mathbb{R}^2(g, h)$.

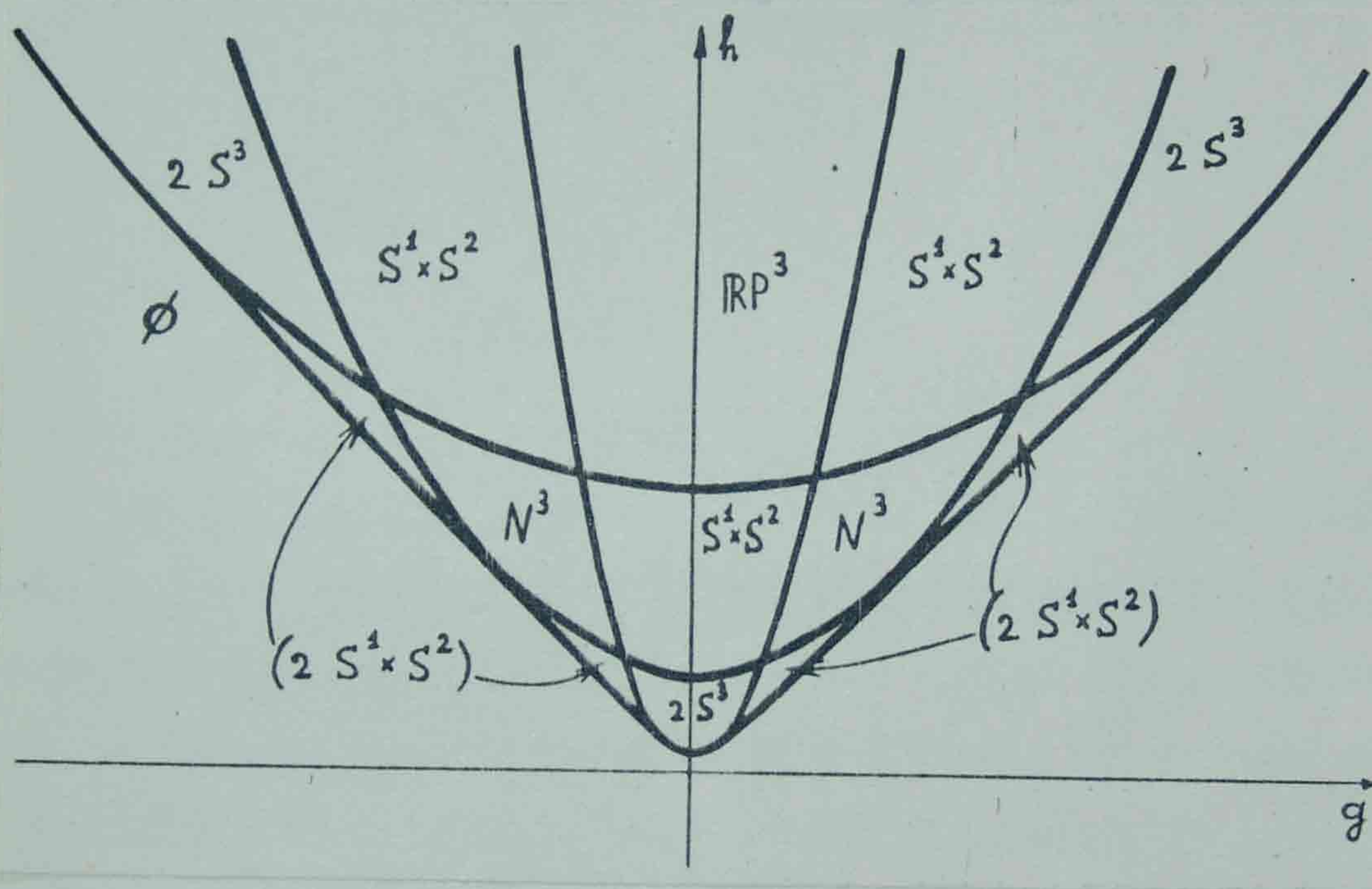


Рис. 8

Топологический тип $Q_h^3 = \{t_1 = 1, t_2 = g, H = h\}$ в каждой из областей на Рис. 7 и Рис. 8 можно определить, рассматривая проекцию Q_h^3 на сферу Пуассона. Образ Q_h^3 при проекции определяется условием

$$\frac{g^2}{z} + \beta z \leq 2h, \quad A_1 \leq z \leq A_3, \quad (2.22)$$

где через z обозначено выражение $A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2$. График функции $\varphi(z) = \frac{g^2}{z} + \beta z$ изображен на Рис. 9(a) при $\beta = -1$

и на Рис. 9 (б) при $\epsilon = 1$. В случае $\epsilon = 1$ функция $\varphi(z)$ имеет минимум при $z = g$. На Рис. 9 (б) приведен один из возможных вариантов расположения g (на оси z) относительно A_1, A_2, A_3 . Несложно исследовать все возможные варианты и установить, какой вид имеет область (2.22) на сфере Пуассона в каждом случае. После этого топологический тип Q^3 определяется стандартным способом. Через N^3 на Рис. 8 обозначено многообразие $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$. Его проекция на сферу Пуассона — диск с тремя дырками.

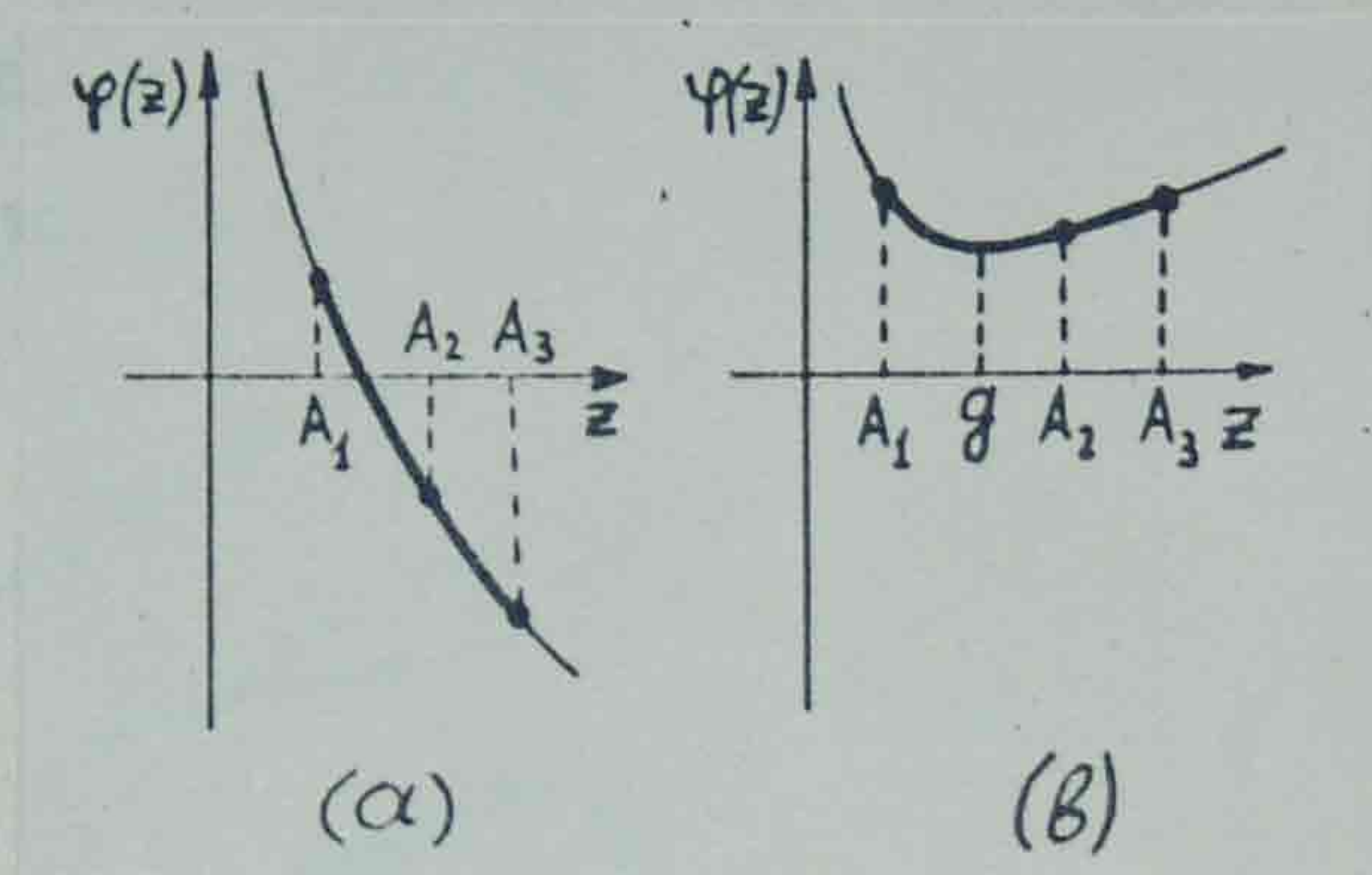


Рис. 9

Случай Стеклова. Построение бифуркационных диаграмм отображения $f_2 \times H$ для случая Стеклова можно провести совершенно аналогично случаю Клебша. Как и в случае Клебша бифуркационная диаграмма здесь есть объединение трех парабол и отрезков общих касательных к ним, но оси этих парабол (в отличие от случая Клебша) не совпадают. В результате получается большое количество различных вариантов расположения этих парабол в зависимости от соотношений между параметрами A_1, A_2, A_3 гамильтониана. Описание этого случая, аналогичное предыдущим, становится очень громоздким и мы не будем его проводить. Все возможные инварианты Фоменко для случая Стеклова будут вычислены в главе 2 (см. §7).

ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТА ФОМЕНКО

§ 3. Случай Эйлера - Луковского.

Гамильтониан случая Эйлера (I.12) есть частный случай гамильтониана случая Луковского (I.16) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Дополнительный интеграл в обоих случаях есть $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Бифуркационные диаграммы отображения $K \times H: TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $TS^2 = \{t_1=1, t_2=g\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$, построены в [6]. При $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отличных от нуля они имеют вид, изображенный на Рис. 10 (при $g=0$ на Рис. 10(a), при $g \neq 0$ на Рис. 10(b-e)).

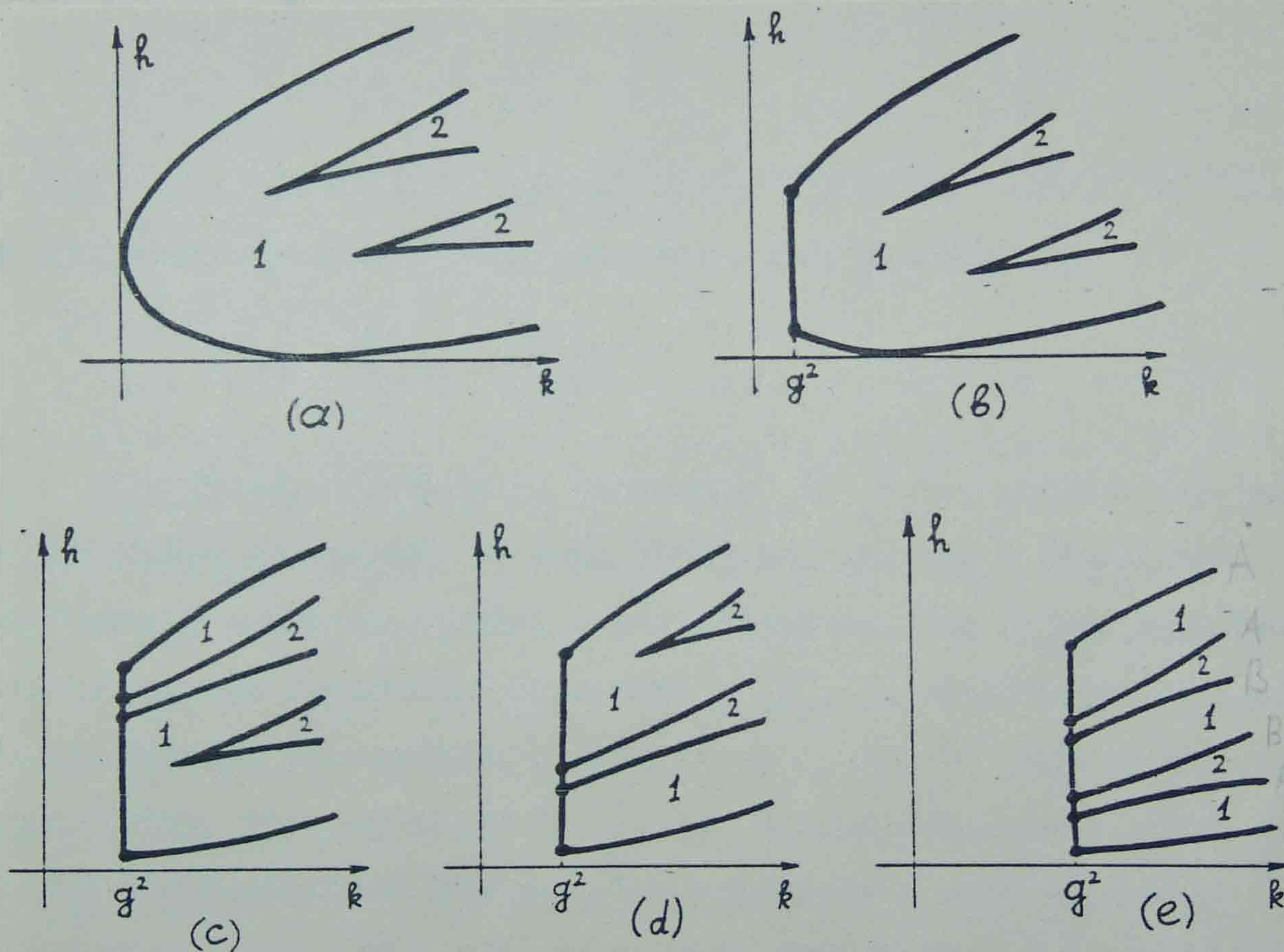


Рис. 10

При изменении значения g , определяющего многообразие TS^2 , на котором задана система, бифуркационная диаграмма изменяется

следующим образом: отрезок прямой $k = g^2$ сдвигается вправо и постепенно "отсекает" куски бифуркационной кривой, на которых расположены точки возврата. При этом куски могут отсекаются в различном порядке (это зависит от параметров гамильтониана $A_1, A_2, A_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). Поэтому при возрастании g мы получим либо последовательность диаграмм $(\alpha) - (\beta) - (\gamma) - (\epsilon)$, либо $(\alpha) - (\beta) - (d) - (\epsilon)$ (см. Рис. 10). Для тех областей на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, прообраз которых при отображении $K \times H$ не пуст, цифрами на Рис. 10 указано количество торов Лиувилля в прообразе каждой точки из соответствующей области. Бифуркационная кривая касается (при $g=0$) прямой $k=0$ в точке

$$h_0 = \frac{\lambda_1^2}{2A_1} + \frac{\lambda_2^2}{2A_2} + \frac{\lambda_3^2}{2A_3}$$

и (при $g^2 < \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$) прямой $h=0$ в точке $k_0 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Шесть ветвей кривой на бесконечности имеют асимптотику

$$h \sim \frac{k}{2A_i} \pm \frac{\lambda_i}{A_i} \sqrt{k} \quad (3.1)$$

Если точка, двигаясь по плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, пересекает бифуркационную диаграмму, то торы Лиувилля, лежащие в прообразе этой точки, каким-то образом перестраиваются. Вид перестроек торов для случая Жуковского определен в [6]. Их можно описать следующим образом. Рассмотрим прямую $h=c$, где c достаточно велико. Тогда, так как верно (3.1), эта прямая пересекает ветви кривой в определенном порядке. Занумеруем их в этом порядке:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (см. Рис. 11(a)). Рассмотрим функцию $\tilde{K} = K|_{Q_c}$, где $Q_c = \{t_1=1, t_2=g, H=c\}$. Критическими значениями функции $\tilde{K}$ будут $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Граф Γ , показывающий как перестраиваются торы Лиувилля вдоль прямой $h=c$, изображен на Рис. 11(b). Жирные вершины графа

обозначают минимаксные окружности, а вершины, в которых сходятся три ребра графа, соответствуют седловым окружностям функции $\tilde{K}$ (см. [II-12]).

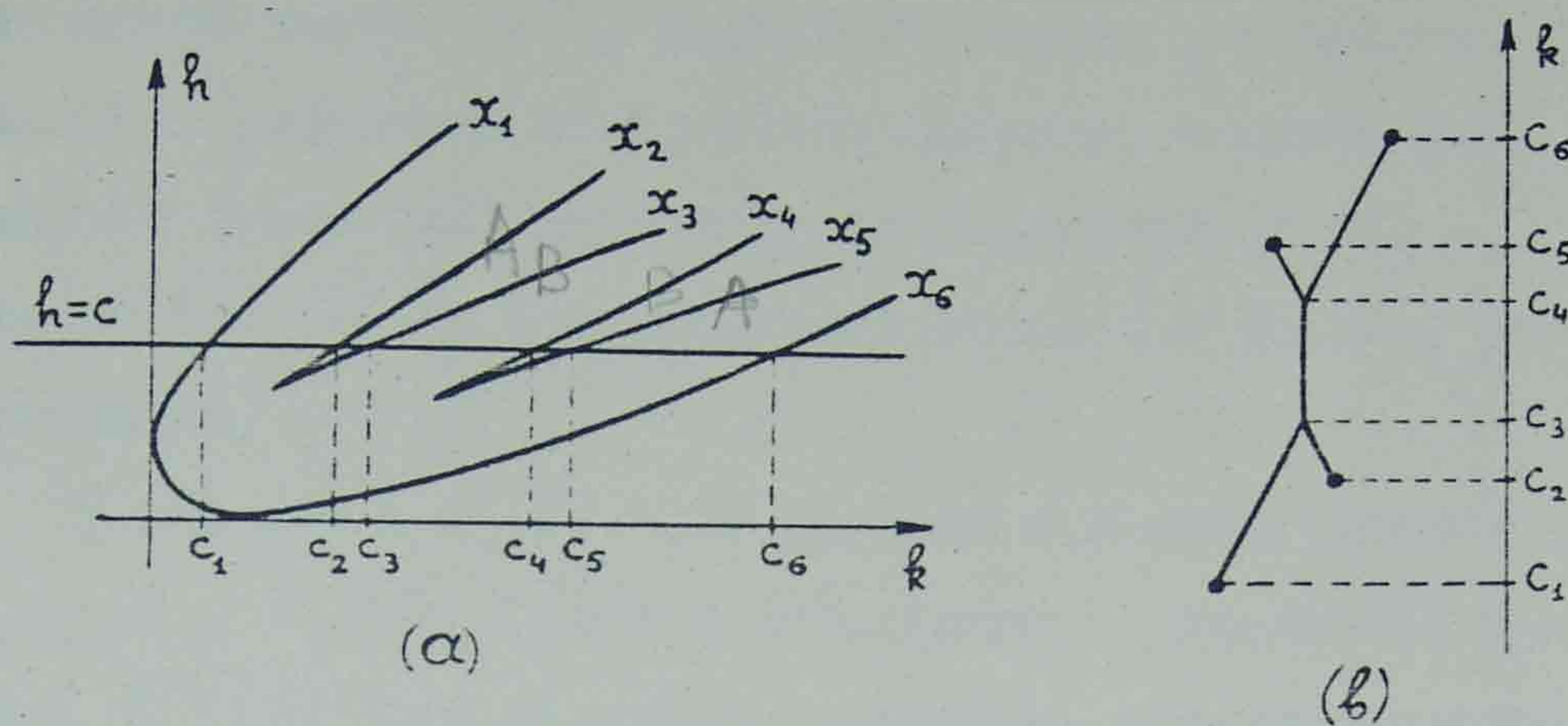
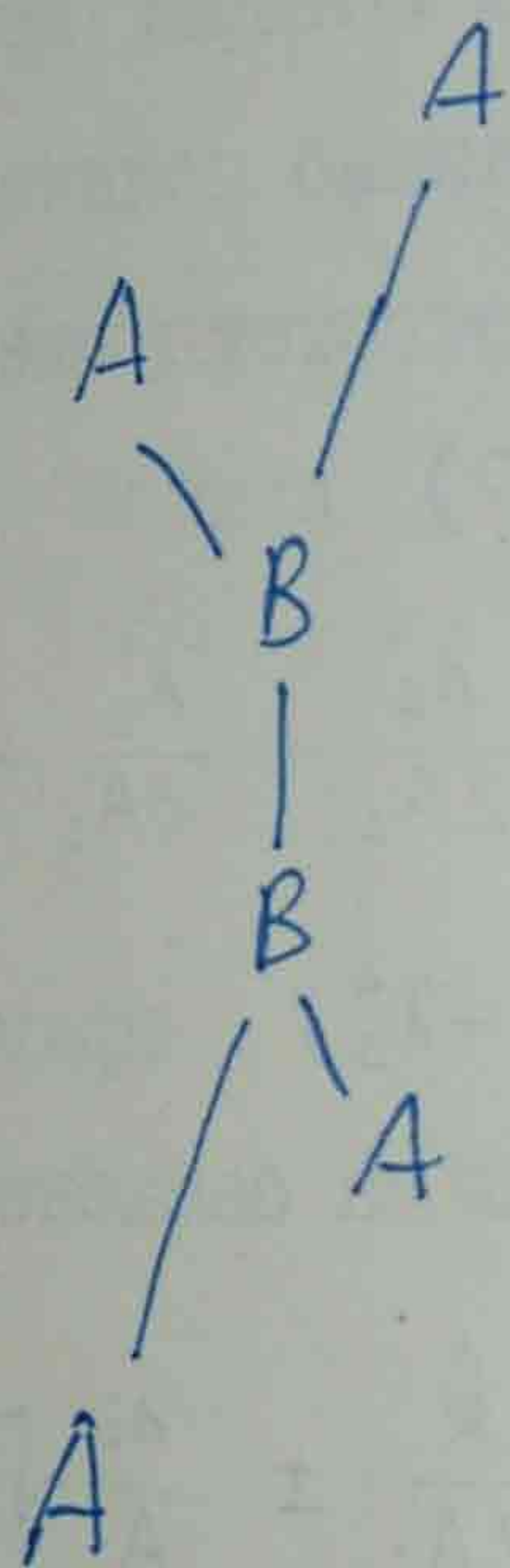


Рис. 11

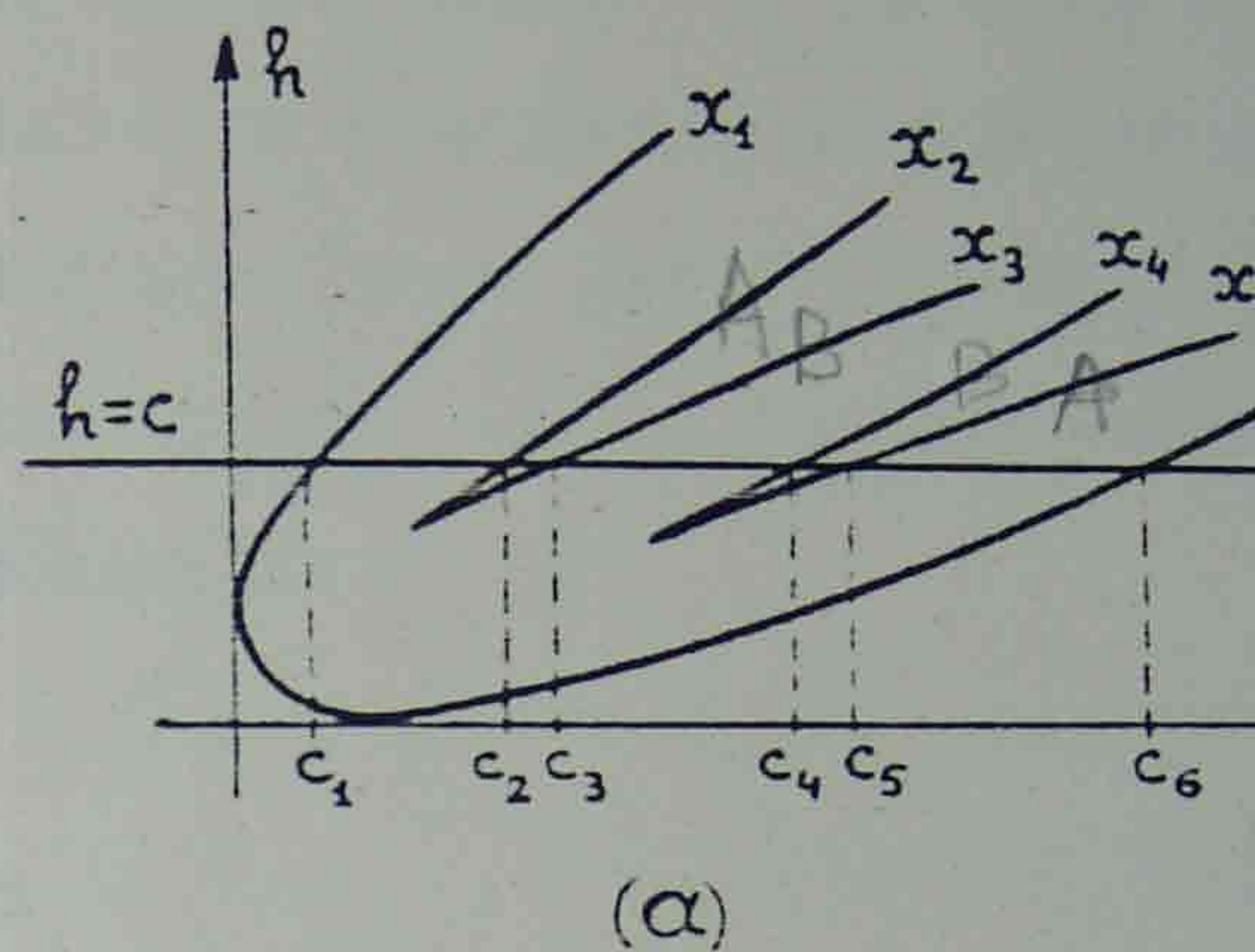
Таким образом, для всех точек кривой перестройки торов Лиувилля описаны. В прообразе точек из отрезка $k=g^2$ лежат только минимальные окружности функции $\tilde{K}$.

Чтобы описать теперь все возможные типы инвариантов, нужно определить, как прямая $h=c$ пересекает бифуркационную диаграмму при различных c . Рассмотрим сначала случай $g=0$. Пусть точка возврата, разделяющая ветви x_4 и x_5 , имеет на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ координаты (k_1, h_1) , а точка возврата между ветвями x_2 и x_3 — координаты (k_2, h_2) . Легко установить, что при $0 < c < \min(h_1, h_2)$ инвариант Фоменко имеет тип I из таблицы (см. Приложение). При $c > \max(h_1, h_2)$ инвариант имеет тип 4 из таблицы. Если $\min(h_1, h_2) < c < \max(h_1, h_2)$, то инвариант имеет тип 2. Аналогичным образом разбирается случай $g \neq 0$. Окончательно получаем, что к кривым, разделяющим области с различным топологическим типом изоэнергетических поверхностей Q^3 (Рис. 5 на стр. 34), надо добавить два горизонтальных отрезка с концами в точках возврата. Тогда топологический тип Q^3 и инвариант Фо-

Рис. 11(б);



обозначают минимаксные окружности три ребра графа, соответствуют (см. [II-12]).



Таким образом, для всех точек α описаны. В прообразе точек из α малые окружности функции $\tilde{K}$

Чтобы описать теперь все α определить, как прямая $h=c$ α при различных c . Рассмотрим точку возврата, разделяющая ветви $\mathbb{R}^2(k, h)$ координаты (k_1, h_1) x_2 и x_3 - координаты (k_2, h_2) $0 < c < \min(h_1, h_2)$ инвариант (см. Приложение). При $c > \max(h_1, h_2)$ таблицы. Если $\min(h_1, h_2) < c < \max(h_1, h_2)$ тип 2. Аналогичным образом соответственно получаем, что к кривым, топологическим типом изогнутости (на стр. 34), надо добавить две точки возврата. Тогда топо.

менко будут совпадать для всех точек из одной области. Различные варианты расположения этих отрезков на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ определяются расположением точек h_1, h_2, h_0 на оси h .

Будем рисовать кривые, разделяющие области с различным топологическим типом Q^3 , сплошными линиями, а кривые, разделяющие области с различным инвариантом Фоменко, — пунктиром. В каждой из областей будем указывать пару (топологический тип Q^3 — инвариант Фоменко для Q^3), где инвариант обозначен номером из Таблицы 2 Приложения.

Т е о р е м а I. Для системы с гамильтонианом (I.16), где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, (случай Жуковского) разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ при различных значениях параметров гамильтониана имеют вид, изображенный на Рис. I2 (a-f). Для каждой области на Рис. I2 указаны топологический тип Q^3 и инвариант Фоменко. Полный список (при различных параметрах гамильтониана) состоит из 9 пар: $S^3-1, S^3-2, S^3-4, S^1 \times S^2-1, S^1 \times S^2-2, S^1 \times S^2-4, \mathbb{R}P^3-1, \mathbb{R}P^3-2, \mathbb{R}P^3-4$.

Замечание: на Рис. I2 встречаются инварианты с номерами 2 и 2'. При изменении знака дополнительного интеграла эти инварианты меняются местами, т.е. слова-молекулы для инвариантов 2 и 2' совпадают, а графы Γ симметричны относительно горизонтальной прямой (см. Приложение, Замечание 2). В дальнейшем мы также будем указывать на рисунке, какой из инвариантов реализуется для данного интеграла, а в списке инвариантов для интегрируемого случая будем считать их совпадающими.

Отметим, что в работе [6] не рассматривался вопрос о том, будет ли дополнительный интеграл $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ боттовским, и перестройки торов Лиувилля были найдены другим способом. Однако можно показать, что в случае Жуковского дополнительный интеграл

БОТТОВСКИЙ на тех и только тех изоэнергетических поверхностях

$Q^3 = \{t_1=1, t_2=q, H=h\}$, для которых точка (q, h) не принадлежит разделяющим кривым (на Рис. 12).

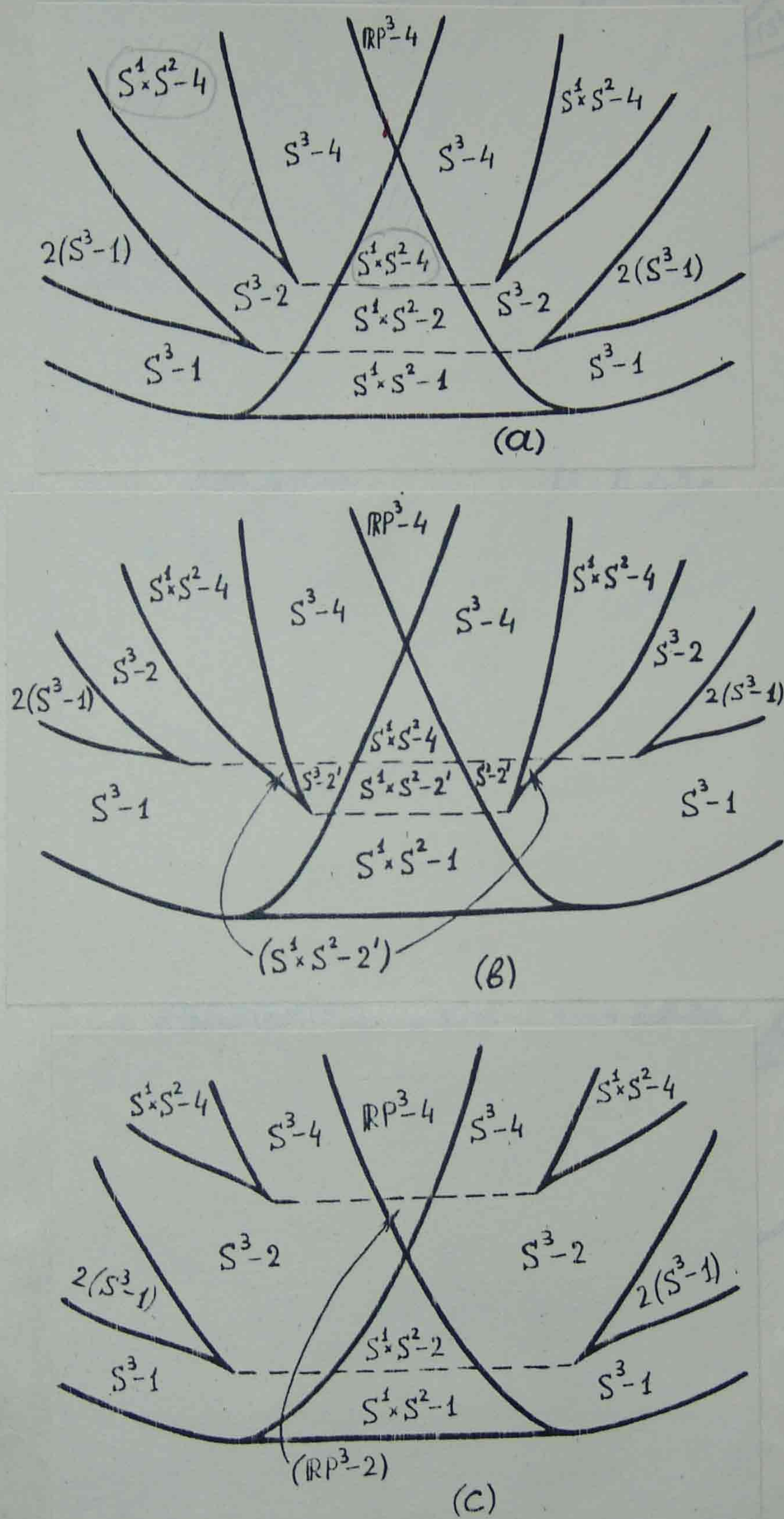


Рис. 12
(a, b, c)

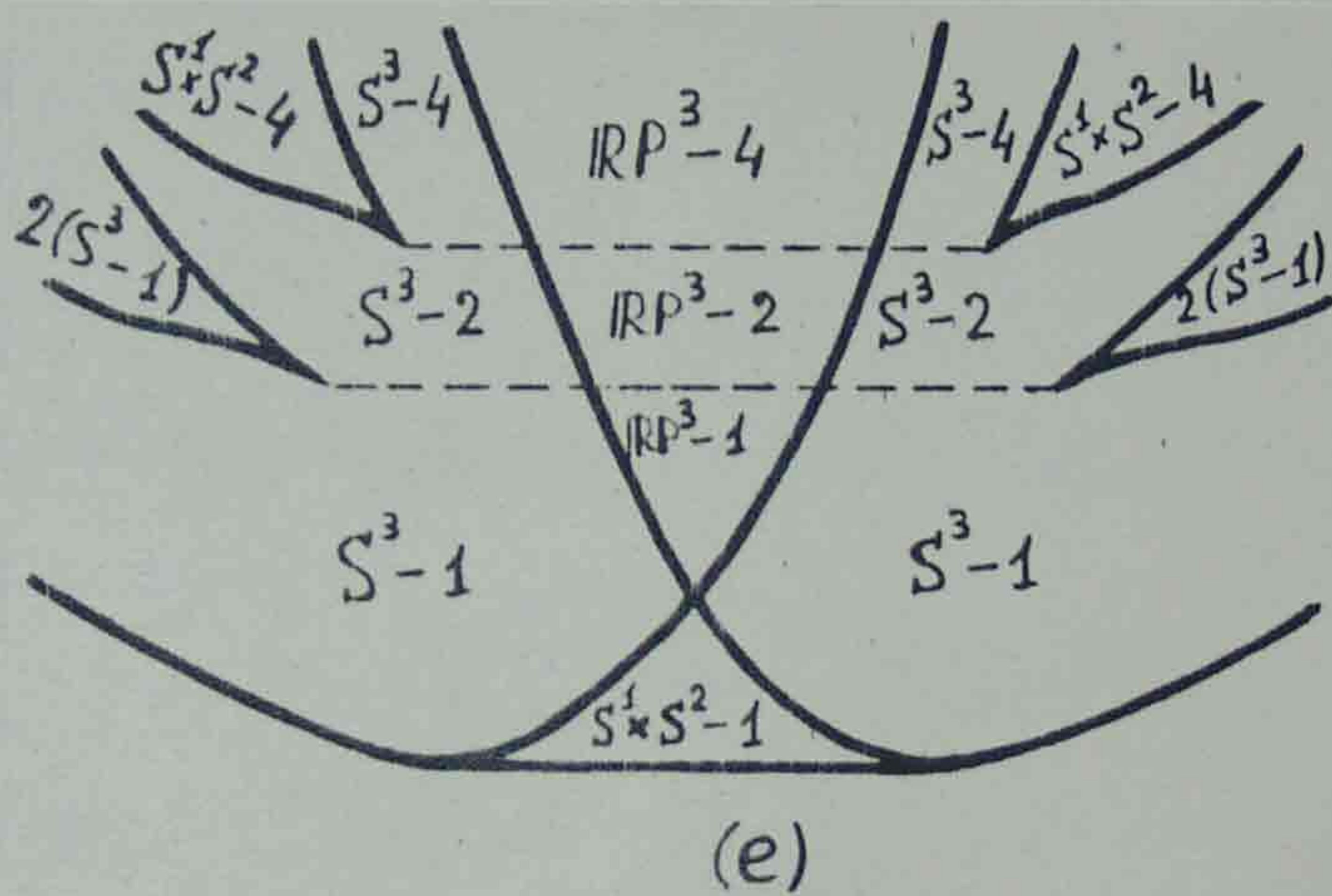
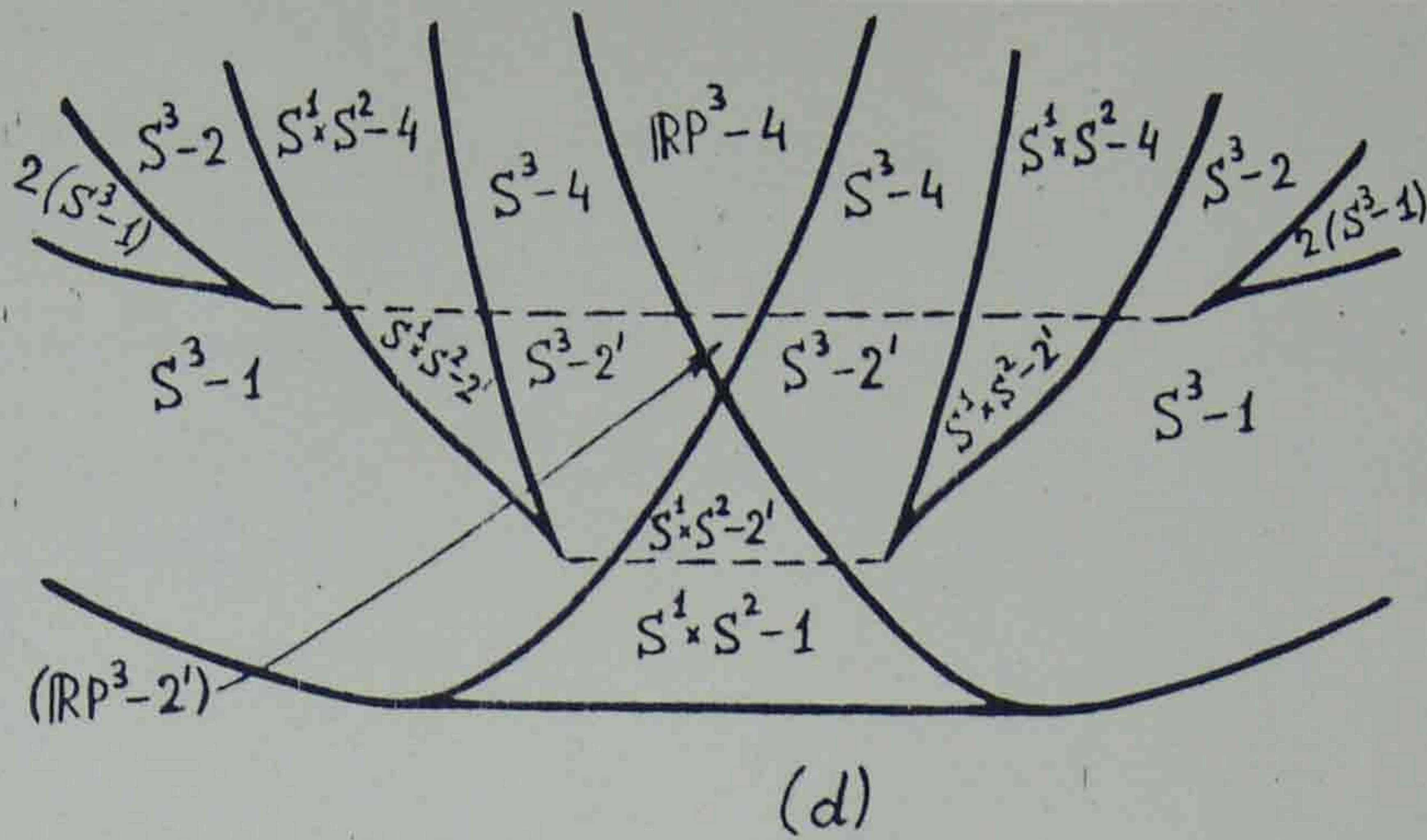
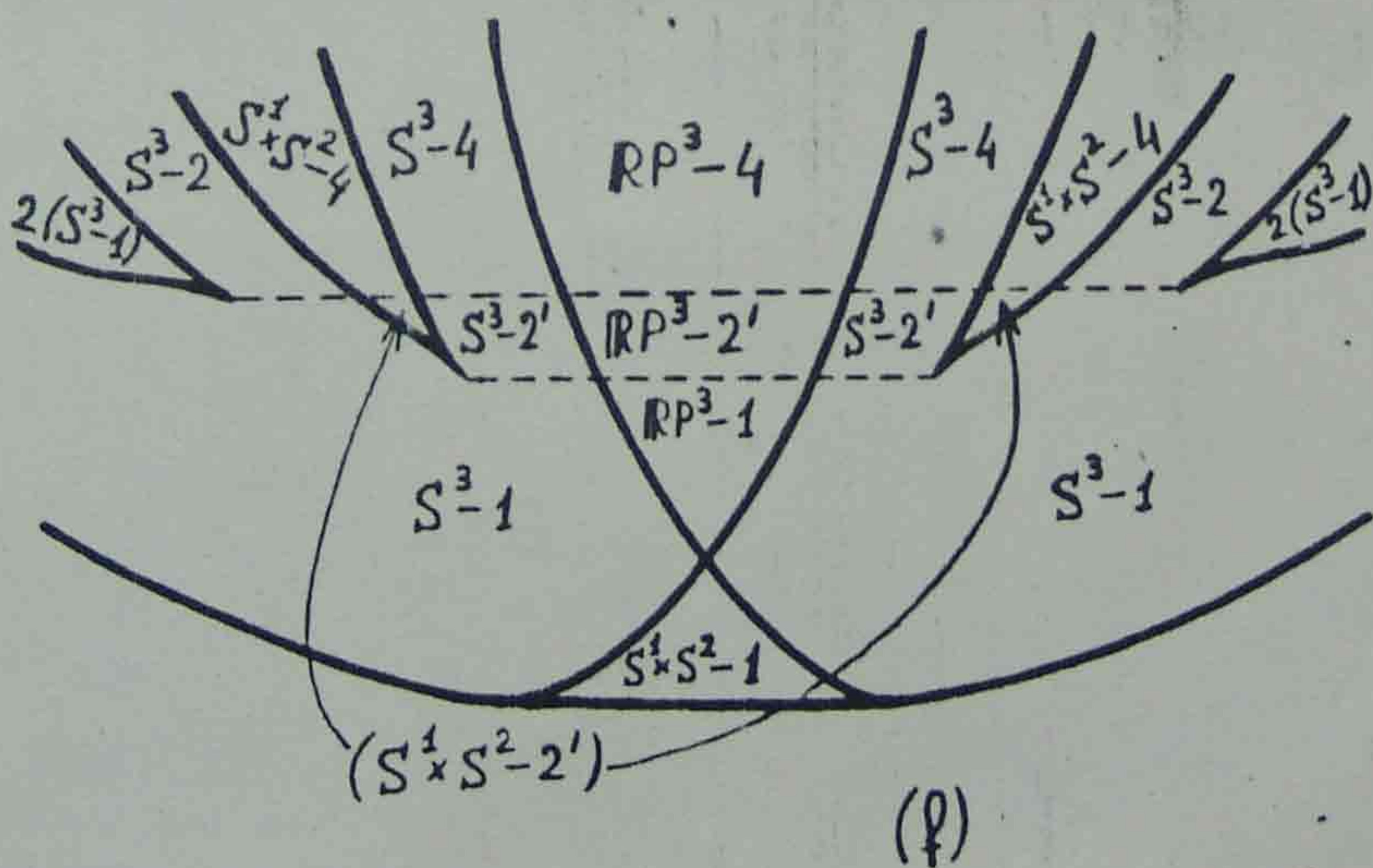


Рис. 12
(d, e, f)



Рассмотрим теперь гамильтониан (I.12), который получается из гамильтониана (I.16) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (случай Эйлера). Бифуркационная диаграмма отображения $K \times H$ получается предельным переходом из случая Жуковского (при $\lambda \rightarrow 0$). При этом ветви кривой, изображенной на Рис. 10 (стр. 42), попарно сливаются:

x_1 и x_2 , x_3 и x_4 , x_5 и x_6 . Получаем бифуркационную диаграмму, изображенную на Рис. 13. Она состоит из трех лучей

$$\left\{ h = \frac{k}{2A_i}, k \geq g^2 \right\} \quad \text{и отрезка} \quad \left\{ k = g^2, \frac{g^2}{2A_3} \leq h \leq \frac{g^2}{2A_1} \right\}.$$

Цифрами на Рис. 13 указано количество торов Лиувилля. Инвариант здесь меняется лишь при критических значениях функции $H|_{TS^2}$.

Поэтому разделяющие кривые для данного случая — только те, что изображены на Рис. 1 (стр. 27). При слиянии ветвей бифуркационной диаграммы для случая Жуковского критические окружности переходят на один уровень и в результате возникает инвариант типа 5, которого в случае Жуковского не было.

Т е о р е м а 2. Для системы с гамильтонианом (I.12) (случай Эйлера) разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ изображены на Рис. 14. Список встречающихся в этом случае пар: $S^3 - 1$, $S^1 \times S^2 - 5$, $\mathbb{R}P^3 - 5$. Дополнительный интеграл боттовский на всех неособых изоэнергетических поверхностях.

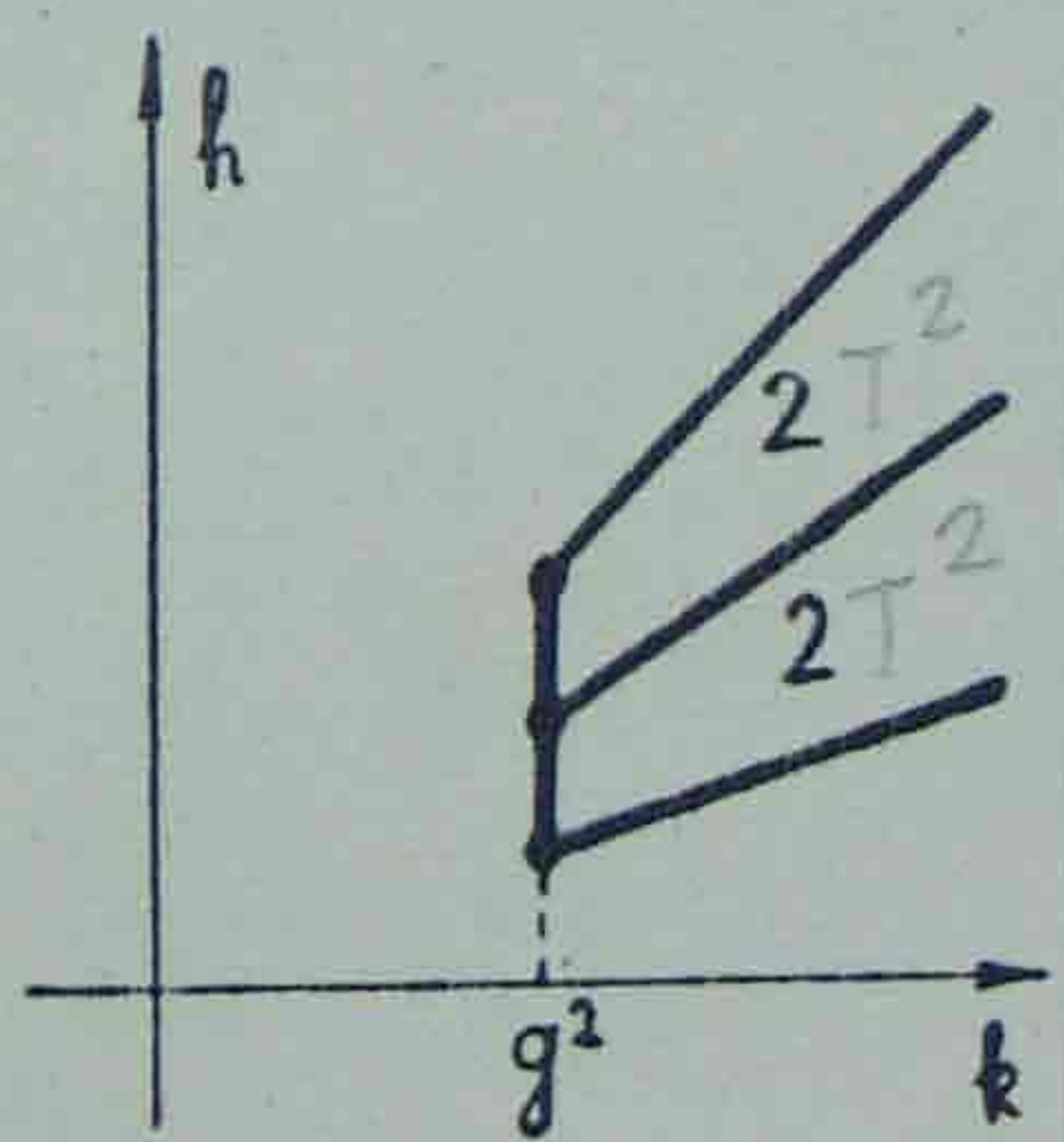


Рис. 13

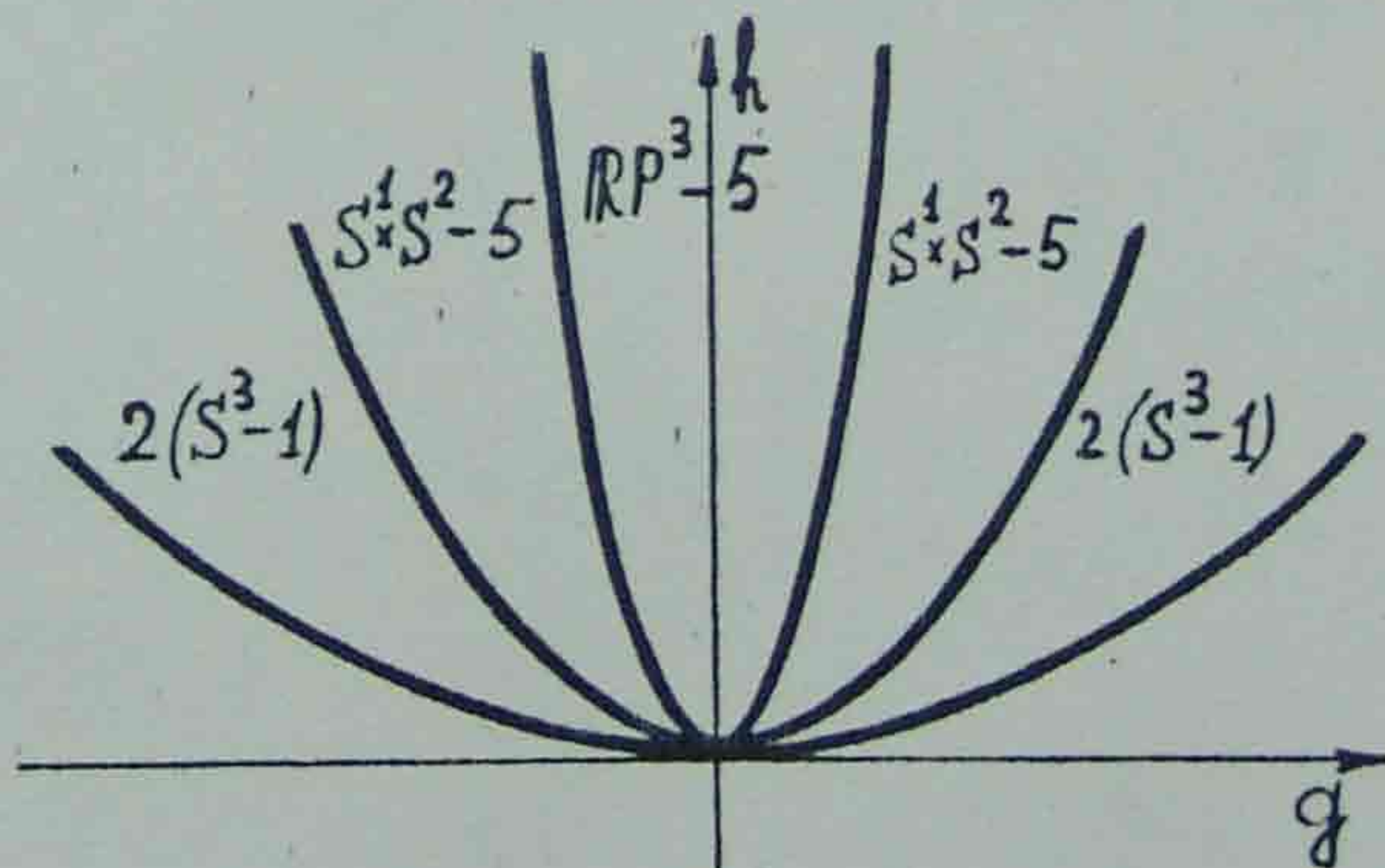


Рис. 14

§ 4. Случай Ковалевской, Горячева - Чаплыгина, Сретенского.

Гамильтониан случая Ковалевской (I.14) линейной заменой координат в $\mathbb{R}^6(S, R)$, сохраняющей скобку (I.6), приводится к виду (2.1). При этой замене дополнительный интеграл примет вид:

$$K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - R_1 \right)^2 + (S_1 S_2 - R_2)^2. \quad (4.1)$$

Кривые, разделяющие области на плоскости $\mathbb{R}^2(q, h)$ с различным топологическим типом изоэнергетических поверхностей, для гамильтониана (2.1) описаны в § 2 (см. Рис. 3 на стр. 29). Для того, чтобы описать все разделяющие кривые в случае Ковалевской, надо добавить к кривым на Рис. 3 кривые, разделяющие области с различным инвариантом Фоменко. Таким образом, необходимо определить, как изменяется инвариант изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{I_1=1, I_2=q, H=h\}$ при изменении h , если q фиксировано. Это можно сделать, рассмотрев бифуркационные диаграммы отображения $K \times H: TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h)$, где H - это гамильтониан (2.1), а K - это интеграл (4.1), заданные на $TS^2 = \{I_1=1, I_2=q\}$.

Бифуркационные диаграммы этого отображения построены в [6]. Там же определены перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения $K \times H$. Вид бифуркационной диаграммы зависит от значения q . Качественно различные диаграммы получаются в следующих случаях: (а) $0 < |q| < 1$; (б) $1 < |q| < (\frac{4}{3})^{3/4}$; (в) $(\frac{4}{3})^{3/4} < |q| < \sqrt{2}$; (д) $|q| > \sqrt{2}$. Они приведены на Рис. 15. Бифуркационные диаграммы состоят из луча

$$\{k=0, h \geq q^2\}, \quad (4.2)$$

части параболы

$$\{k = (h - q^2)^2, \quad \frac{q^2}{2} - 1 \leq h \leq q^2 + \frac{1}{2q^2}\}$$

и кривой, заданной параметрически:

$$k = 1 + tg + \frac{t^4}{4}, \quad h = \frac{t^2}{2} - \frac{g}{t}, \quad (4.3)$$

$$t \in]-\infty, 0[\cup]g, +\infty[.$$

Точка возврата кривой (4.3) при $|g| \leq (\frac{4}{3})^{3/4}$ имеет координаты

$$(1 - \frac{3}{4} g^{\frac{4}{3}}, \frac{3}{2} g^{\frac{2}{3}}) \in \mathbb{R}^2(k, h), \quad (4.4)$$

точка касания кривой и параболы - координаты

$$(\frac{1}{4g^4}, g^2 + \frac{1}{2g^2}) \in \mathbb{R}^2(k, h). \quad (4.5)$$

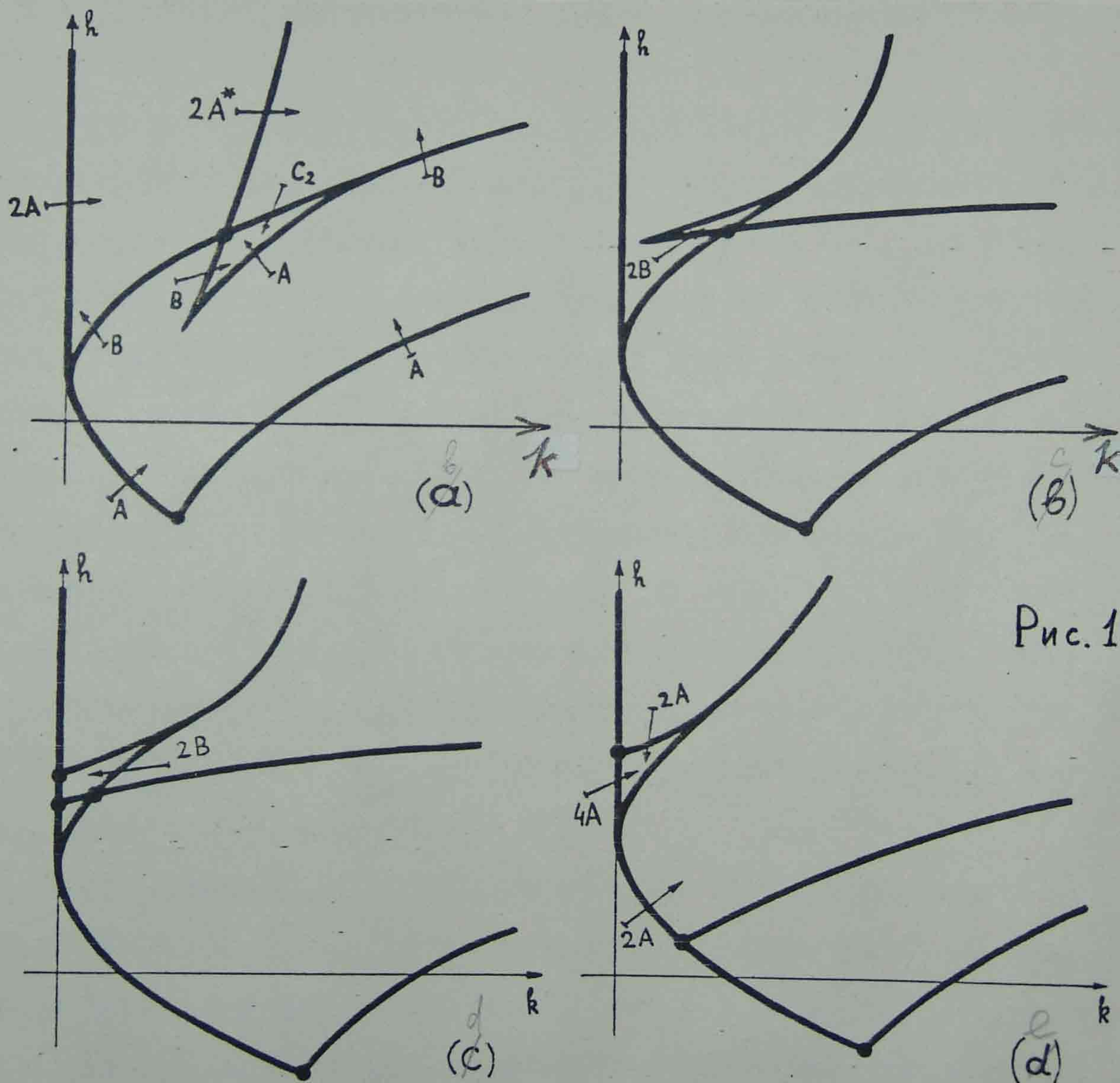


Рис. 15

На Рис. 15 указаны перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения $K \times H$. Если точка, двигаясь по плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, пересекает соответствующую ветвь бифуркационной диаграммы в направлении, указанном стрелкой, то перестройка торов Лиувилля в прообразе этой точки описывается буквой-атомом, обозначение которой указано около данной стрелки. Все буквы-атомы, встречающиеся в данной работе, перечислены в Таблице I (см. Приложение). Бифуркационные диаграммы (a), (b), (c), (d) на Рис. 15 переходят одна в другую при непрерывном изменении параметра g . Те части бифуркационной диаграммы, которые переходят друг в друга при изменении g , определяют одинаковые перестройки торов Лиувилля.

Зная перестройки торов Лиувилля для всех точек бифуркационной диаграммы, можно описать инвариант Фоменко изоповерхностной поверхности Q^3 при любых фиксированных g и h . Для этого нужно определить, как перестраиваются торы Лиувилля в прообразе точки, движущейся вдоль прямой $h=c$. Будем менять c , определяющее эту прямую. Из явного вида бифуркационных диаграмм легко понять, при каких значениях c будет изменяться инвариант Фоменко соответствующей изоповерхностной поверхности. Это происходит в следующих случаях: 1) когда c есть критическое значение функции $\tilde{H} = H|_{TS^2}$ (в этом случае изменяется также топологический тип Q^3); 2) когда прямая $h=c$ проходит через точку возврата кривой (4.3), или через точку касания кривой и параболы, или через начало луча (4.2).

Образы критических точек функции $\tilde{H}$ при отображении $K \times H$ обозначены на Рис. 15 жирными точками. Соответствующие им разделяющие кривые уже построены (Рис. 3, стр. 29). Учитывая (4.2), (4.4), (4.5), получаем уравнения остальных разделяющих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$:

$$h = g^2; \quad h = \frac{3}{2} g^{\frac{2}{3}}, \quad |g| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}; \quad h = g^2 + \frac{1}{2g^2}. \quad (4.6)$$

Объединив кривые (4.6) с кривыми, изображенными на Рис. 3, получаем полный набор разделяющих кривых для случая Ковалевской.

Как и в случае Жуковского, метод вычислений, применяемый в работе [6], не дает ответа на вопрос: будет ли дополнительный интеграл случая Ковалевской боттовским. Это можно установить, вычислив индексы критических окружностей для функции $K|Q_h^3$, например, используя Лемму I (из §I).

Т е о р е м а 3. Для системы с гамильтонианом (I.I4) (случай Ковалевской) на Рис. 16 изображены разделяющие кривые на плоскости $R^2(g, h)$ и для каждой области указана пара (топологический тип Q^3 — инвариант Фоменко). Полный список инвариантов для этого случая состоит из 10 пар: S^3-1 ; S^3-2 ; S^3-4 ; S^3-6 ; $S^4 \times S^2-2$; $S^4 \times S^2-6$; K^3-6 ; RP^3-6 ; RP^3-7 ; RP^3-8 . Для всех точек (g, h) , не лежащих на разделяющих кривых, дополнительный интеграл — боттовский на поверхности $Q^3 = \{t_1 = 1, t_2 = g, H = h\}$.

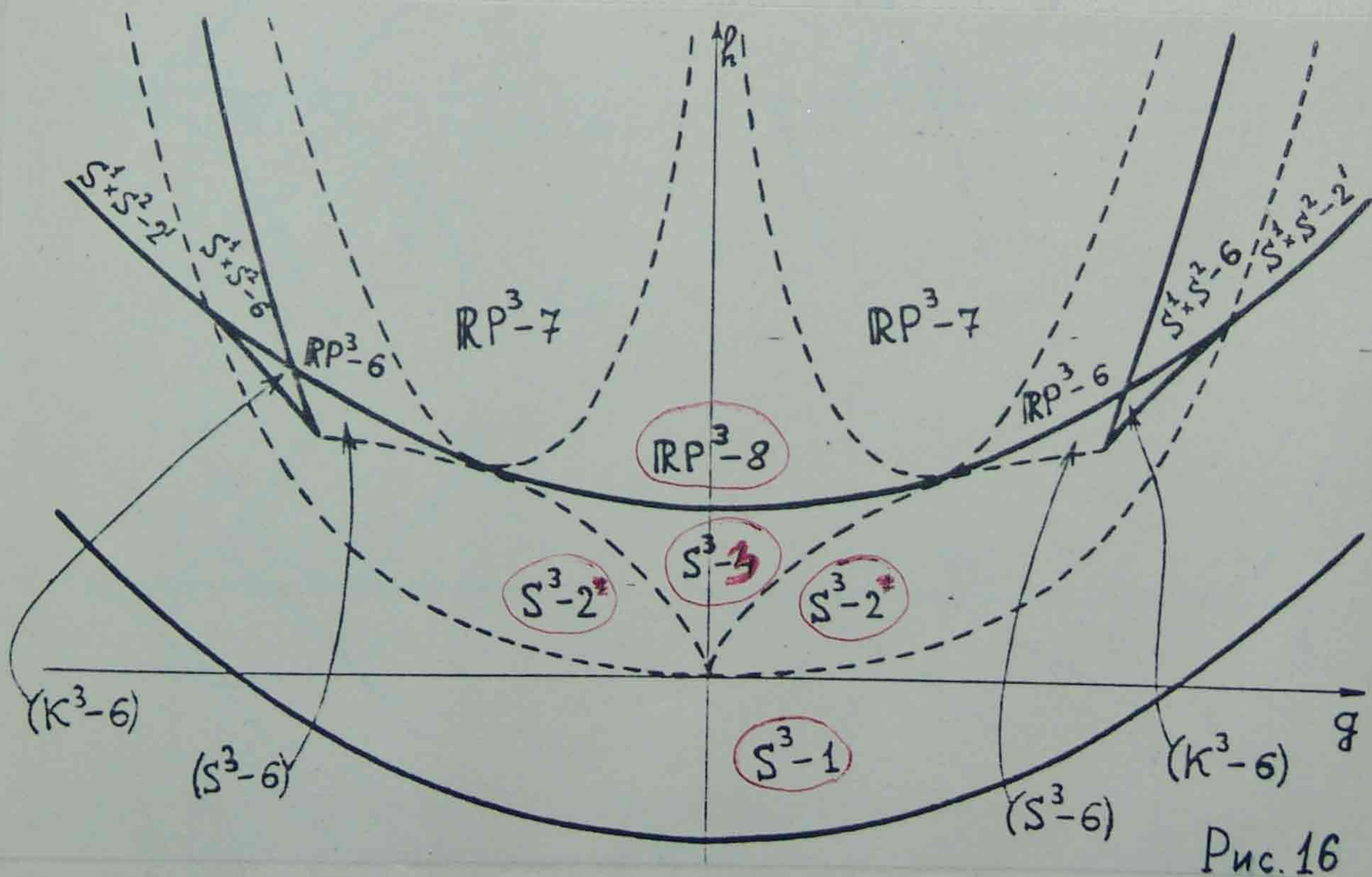


Рис. 16

Перейдем теперь к случаю Сретенского. Гамильтониан случая Сретенского (1.17) приводится линейной заменой координат, сохраняющей скобку (1.6) в $\mathbb{R}^6(S, R)$ к виду (2.11). При этом дополнительный интеграл примет вид:

$$K = (S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) - S_1 R_3. \quad (4.7)$$

Случай Горячева - Чаплыгина получается из случая Сретенского при $\lambda = 0$.

Бифуркационные диаграммы отображения $H \times K : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$ построены в [6]. Здесь H - это гамильтониан (2.11), а K - это интеграл (4.7), заданные на $TS^2 = \{f_1 = 1, f_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$. Бифуркационные диаграммы для различных значений параметра λ изображены на Рис. 17: (a) $\lambda = 0$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \lambda < 0$; (c) $-1 < \lambda < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; (d) $\lambda < -1$. При замене λ на $-\lambda$ диаграммы отражаются симметрично относительно прямой $k = 0$.

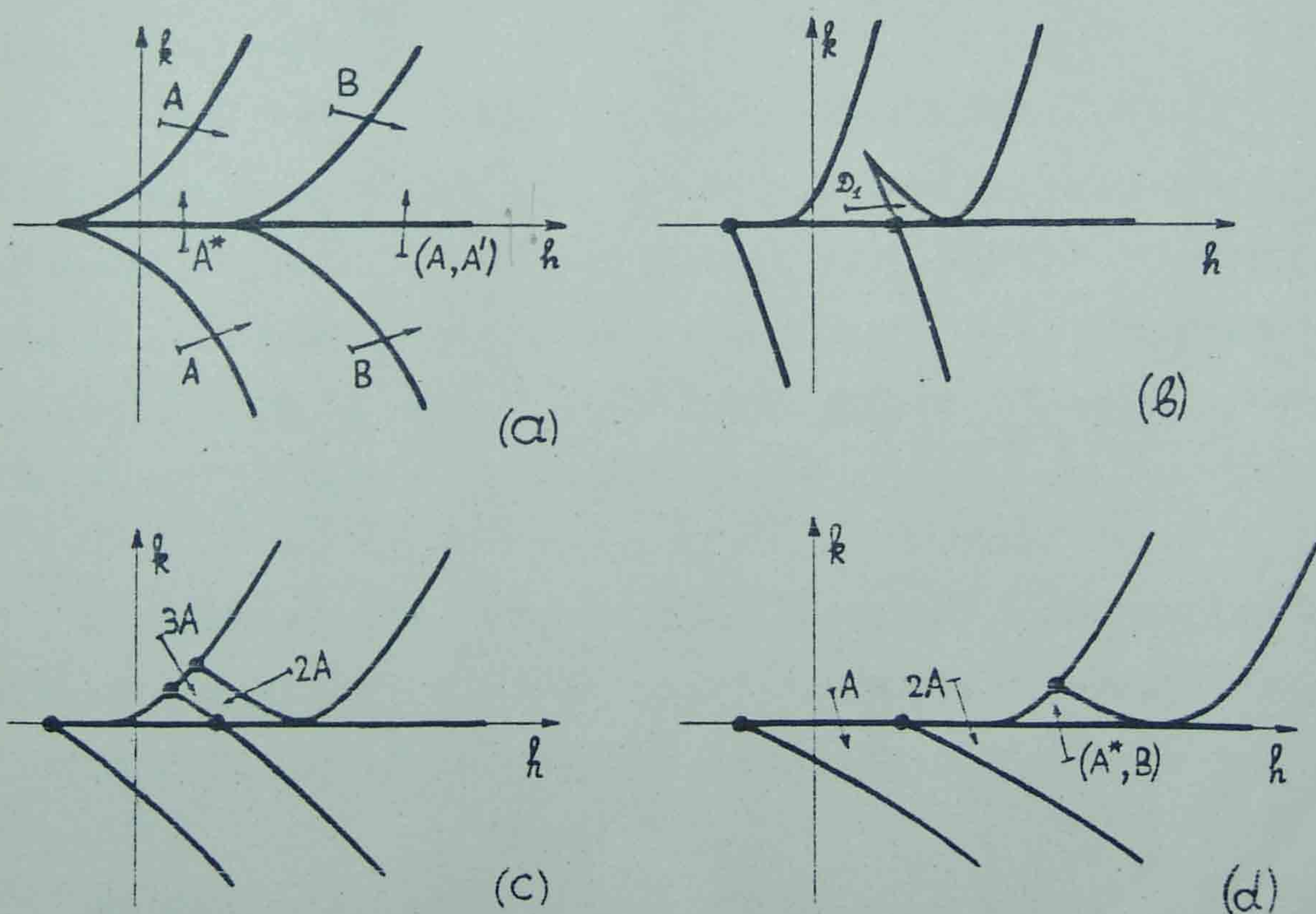


Рис. 17

Все бифуркационные диаграммы состоят из луча $\{k=0, h \geq -1\}$ и кривых, которые можно задать параметрически следующим образом:

$$h = \frac{3t^2}{2} + 4\lambda t + 2\lambda^2 \pm 1, \quad k = t^3 + 2\lambda t^2. \quad \text{Перестройки}$$

торов Лиувилля описаны на Рис. I7 тем же способом, что и для случая Ковалевской. Запись (A^*, B) означает, что одновременно происходит две перестройки торов Лиувилля, соответствующие буквам-атомам A^* и B . Запись (A, A') означает, что в прообразе этих точек бифуркационной кривой лежат одна минимальная и одна максимальная окружности интеграла K .

Как и в случае Ковалевской, находя проекции на ось h точек возврата и точек касания бифуркационных кривых, получаем уравнения разделяющих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$: $h = 1 - \frac{2\lambda^2}{3}$ и $h = 2\lambda^2 \pm 1$. Объединив их с кривыми, изображенными на Рис. 6 (стр. 37), получаем ответ для случая Сретенского. Боттовость дополнительного интеграла проверяется вычислением индексов критических окружностей.

Т е о р е м а 4. Для системы с гамильтонианом (I.17) (случай Сретенского) на Рис. I8 изображены разделяющие кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, h)$. Указанный дополнительный интеграл - боттовский на всех изоэнергетических поверхностях, соответствующих точкам (λ, h) , не лежащим на разделяющих кривых. Список инвариантов для случая Сретенского состоит из 8 пар: S^3-1 ; S^3-3 ; S^3-10 ; $S^1 \times S^2-2$; $S^1 \times S^2-11$; $\mathbb{R}P^3-9$; $\mathbb{R}P^3-11$; K^3-10 .

В частности, при $\lambda=0$ (случай Горячева - Чаплыгина) дополнительный интеграл боттовский на всех неособых изоэнергетических поверхностях, список инвариантов состоит из двух пар: S^3-3 ; $\mathbb{R}P^3-9$.

Отметим, что слово-молекула для точки $(-\lambda, h)$ совпадает со словом-молекулой для точки (λ, h) , но граф Γ при этом "пере-

ворачивается", что отмечено на Рис. 18 штрихами, например, 10 и $10'$ (см. Приложение, Замечание 2).

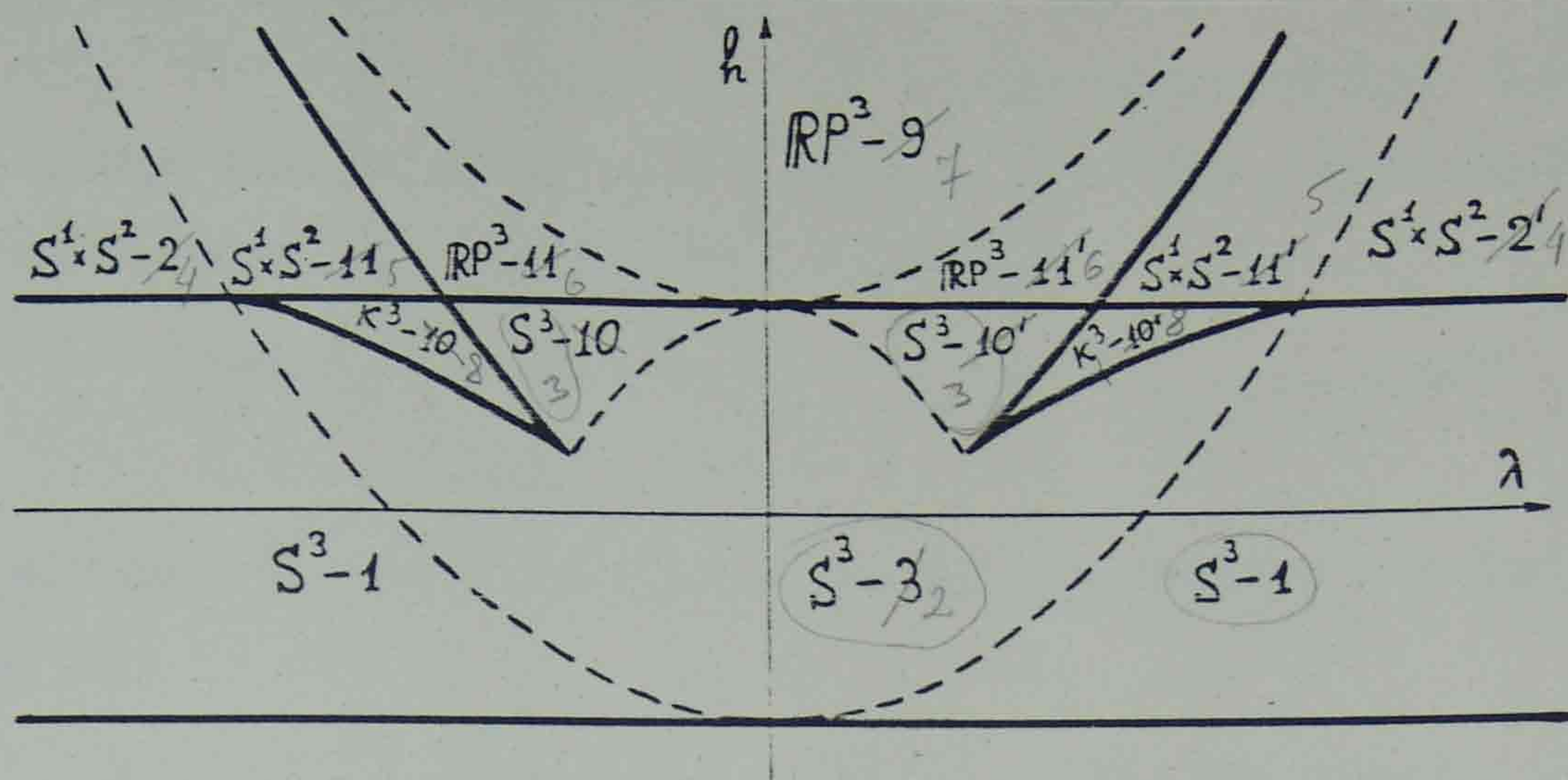


Рис. 18

§ 5. Случай Лагранжа.

Классический случай Лагранжа — это система с гамильтонианом (I.13). Заменой координат в $\mathbb{R}^6(S, R)$ этот гамильтониан можно привести к виду $H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + R_3$. Известны различные обобщения случая Лагранжа. Например, можно рассматривать гамильтониан "с квадратичным потенциалом" $H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + R_3^2$, или добавить "гиростатический момент": $H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + \lambda S_3 + R_3$. Мы будем рассматривать гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + V(R_3), \quad (5.1)$$

где $V(x)$ — некоторая гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$. Для гамильтониана (5.1) дополнительный интеграл, как и для обычного случая Лагранжа, есть $K = S_3$.

Рассмотрим отображение момента $F = H \times K : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$.

где H — гамильтониан (5.1), $K = S_3$, и найдем критические точки этого отображения. Фиксируя значение $S_3 = k$, будем искать критические точки функции $H_{g,k} = H|_{P^3}$, где $P^3 = \{t_1 = 1, t_2 = g, K = k\}$. Поверхность P^3 будет неособой при $k \neq \pm g$ (исключим пока из рассмотрения случай $k = \pm g$). Критические точки функции $H_{g,k}$ находятся из условия

$$\begin{cases} \text{grad } H = \lambda_1 \text{grad } t_1 + \lambda_2 \text{grad } t_2 + \lambda_3 \text{grad } K \\ t_1 = 1, t_2 = g, K = k \end{cases} \quad (5.2)$$

Обозначив R_3 через x , выразим все неизвестные системы (5.2). Получим:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{1-x^2} \cos t, \quad R_2 = \sqrt{1-x^2} \sin t, \quad R_3 = x, \\ S_1 &= \frac{g-kx}{\sqrt{1-x^2}} \cos t, \quad S_2 = \frac{g-kx}{\sqrt{1-x^2}} \sin t, \quad S_3 = k, \\ \lambda_1 &= -\frac{(g-kx)^2}{2(1-x^2)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{g-kx}{1-x^2}, \quad \lambda_3 = \frac{k}{\beta} - \frac{x(g-kx)}{1-x^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где t — некоторый параметр, а x удовлетворяет условию

$$\begin{cases} V'(x) + \frac{(g-kx)(gx-k)}{(1-x^2)^2} = 0 \\ |x| < 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Через $V'(x)$ обозначена производная функции $V(x)$ в точке x .

При каждом фиксированном x , удовлетворяющем (5.4), условия (5.3) определяют ровно одну критическую окружность функции $H_{g,k} = H|_{P^3}$. Значение функции $H_{g,k}$ в точках этой окружности равно

$$W_{g,k}(x) = \frac{(g-kx)^2}{2(1-x^2)} + \frac{k^2}{2\beta} + V(x),$$

а условие (5.4) можно переписать в виде

$$W'(x) = 0, \quad |x| < 1. \quad (5.5)$$

Таким образом, критические окружности функции $H_{g,k}$ параметризованы критическими точками функции $W_{g,k}(x)$. Функция $W_{g,k}$ есть аналог приведенного потенциала (см. [15], [20]). Проекции торов Лиувилля на сферу Пуассона определяются в данном случае условием: $W_{g,k}(R_3) \leq h$.

Определим теперь индексы критических окружностей (5.3) функции $H_{g,k}$. Для этого, в соответствии со схемой вычислений, изложенной в §I, мы выпишем матрицу $G = G_H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \lambda_3 G_K$, где G_H , G_1 , G_2 , G_K — гессианы функций H , f_1 , f_2 , K , а затем ограничим форму, определяемую этой матрицей, на подпространство, ортогональное $\text{grad } f_1$, $\text{grad } f_2$, $\text{grad } K$ (см. Лемму I из §I). Матрица G имеет в данном случае вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & -2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & V''(x) - 2\lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = -\frac{(g - kx)^2}{2(1-x^2)^2}$, $\lambda_2 = \frac{g - kx}{1-x^2}$, а $V''(x)$ — вторая

производная функции $V(x)$ в точке x . Градиенты функций f_1 , f_2 , K в критических точках (5.3) равны

$$\text{grad } f_1 = (0, 0, 0, 2\sqrt{1-x^2} \cos t, 2\sqrt{1-x^2} \sin t, 2x),$$

$$\text{grad } f_2 = (\sqrt{1-x^2} \cos t, \sqrt{1-x^2} \sin t, x, \frac{g-kx}{\sqrt{1-x^2}} \cos t, \frac{g-kx}{\sqrt{1-x^2}} \sin t, k), \quad (5.6)$$

$$\text{grad } K = (0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Базис в подпространстве, ортогональном градиентам (5.6), можно задать, например, в виде

$$e_1 = (\sin t, -\cos t, 0, 0, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 0, 0, \sin t, -\cos t, 0),$$

$$e_3 = \left(\frac{k-gx}{1-x^2} \cos t, \frac{k-gx}{1-x^2} \sin t, 0, x \cos t, x \sin t, -\sqrt{1-x^2} \right).$$

Вычисляя значения $G(e_i, e_j)$, получаем следующую матрицу:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{kx-g}{1-x^2} & 0 \\ \frac{kx-g}{1-x^2} & \frac{(g-kx)^2}{(1-x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-x^2) W''_{g,k}(x) \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения равны: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1 + \left(\frac{g-kx}{1-x^2} \right)^2$,

$\mu_3 = (1-x^2) W''(x)$. Нулевое собственное значение μ_1 соответствует вырождению гессиана функции $H_{g,k}$ вдоль направления, касательного к критической окружности. Собственное значение μ_2 всегда положительно, а знак собственного значения μ_3 совпадает со знаком производной $W''_{g,k}(x)$ (так как $|x| < 1$). Таким образом, критические окружности функции $H_{g,k}$ могут быть либо седловыми, либо минимальными. Так как критическая окружность определяется условием (5.5), то отсюда следует, что седловым окружностям соответствуют локальные максимумы, а минимальным окружностям — локальные минимумы функции $W_{g,k}(x)$ на интервале $(-1, 1)$. Это позволяет описать бифуркационные диаграммы для произвольного гамильтониана вида (5.1). Мы ограничимся здесь лишь описанием тех гамильтонианов, для которых слово-молекула имеет наиболее простой вид.

Т е о р е м а 5. Для гамильтонианов H вида (5.1), где $V(x)$ — некоторая гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$, следующие условия равносильны:

1) для любых значений $x \in (-1, 1)$ верно неравенство

$$V''(x) \geq - \frac{2 |V'(x)|}{1 + x \cdot \operatorname{sgn} V'(x)} ; \quad (5.7)$$

2) на всех неособых изоэнергетических поверхностях $Q^3 = \{t_1=1, t_2=g, H=h\}$ дополнительный интеграл $K=S_3$ боттовский, а слово-молекула есть $A-A$ для любой связной компоненты Q^3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (2) теоремы равносильно тому, что для всех неособых изоэнергетических поверхностей $Q^3 = \{t_1=1, t_2=g, H=h\}$ критическими поверхностями уровня функции $K|_{Q^3}$ могут быть лишь невырожденные минимаксные окружности. Легко понять, что эти же окружности являются критическими окружностями для рассмотренных выше функций $H_{g,k}$ при некоторых g и k . При этом они также не могут быть седловыми или вырожденными критическими окружностями функций $H_{g,k}$, поскольку при вычислении индексов этих окружностей мы в обоих случаях (для функции $H_{g,k}$ и для функции $K|_{Q^3}$) ограничиваем на одно и то же трехмерное подпространство формы, отличающиеся лишь на ненулевой множитель.

Таким образом, из приведенного выше описания критических окружностей функции $H_{g,k}$ следует, что условие (2) теоремы равносильно тому, что для любых g, k критическими точками функции $W_{g,k}(x)$ могут быть лишь невырожденные локальные минимумы. Это можно переформулировать следующим образом. Для любых значений g, k (при $k \neq \pm g$), для любого $x \in (-1, 1)$ верно условие:

$$(\text{если } W'_{g,k}(x) = 0, \text{ то } W''_{g,k}(x) > 0). \quad (5.8)$$

Отметим, что при $k = \pm q$ условие (5.8) может нарушаться, так как этот случай мы не рассматривали при изучении отображения $H \times K : T S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Здесь получаются две критические точки отображения $H \times K$, в которых $\text{grad} H$ и $\text{grad} K$ равны нулю: $(0, 0, \pm q, 0, 0, \pm 1)$.

Введем следующие обозначения: $p = \frac{q+k}{2}$, $q = \frac{q-k}{2}$.

Тогда:

$$W_{g,k}(x) = \frac{p^2}{1+x} + \frac{q^2}{1-x} + V(x) + \frac{k^2(1-\beta)}{2\beta}.$$

Отсюда:

$$W'_{g,k}(x) = -\frac{p^2}{(1+x)^2} + \frac{q^2}{(1-x)^2} + V'(x),$$

$$W''_{g,k}(x) = \frac{2p^2}{(1+x)^3} + \frac{2q^2}{(1-x)^3} + V''(x).$$

Зафиксируем $x \in (-1, 1)$ и рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2(p, q)$ множество, выделяемое условием $W'_{g,k}(x) = 0$. Уравнение

$$-\frac{p^2}{(1+x)^2} + \frac{q^2}{(1-x)^2} + V'(x) = 0 \quad (5.9)$$

определяет на плоскости $\mathbb{R}^2(p, q)$ пару пересекающихся прямых при $V'(x) = 0$ (Рис. 19(c)) или гиперболу при $V'(x) \neq 0$. Координаты вершин гиперболы равны $(\pm(1+x)\sqrt{V'(x)}, 0)$ в случае, когда $V'(x) > 0$ (Рис. 19(a)) и $(0, \pm(1-x)\sqrt{-V'(x)})$, если $V'(x) < 0$ (Рис. 19(b)). Множество точек плоскости, определяемое условием $W''_{g,k}(x) \leq 0$, есть $\emptyset$ при $V''(x) > 0$, точка $(0, 0)$ при $V''(x) = 0$, внутренность эллипса

$$\frac{2p^2}{(1+x)^3} + \frac{2q^2}{(1-x)^3} + V''(x) = 0 \quad (5.10)$$

если $V''(x) < 0$ (Рис. 19(d)). Координаты вершин эллипса равны

$$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-V''(x))(1+x)^3}, 0\right), \quad \left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}V''(x)(x-1)^3}\right) \in \mathbb{R}^2(p, q).$$

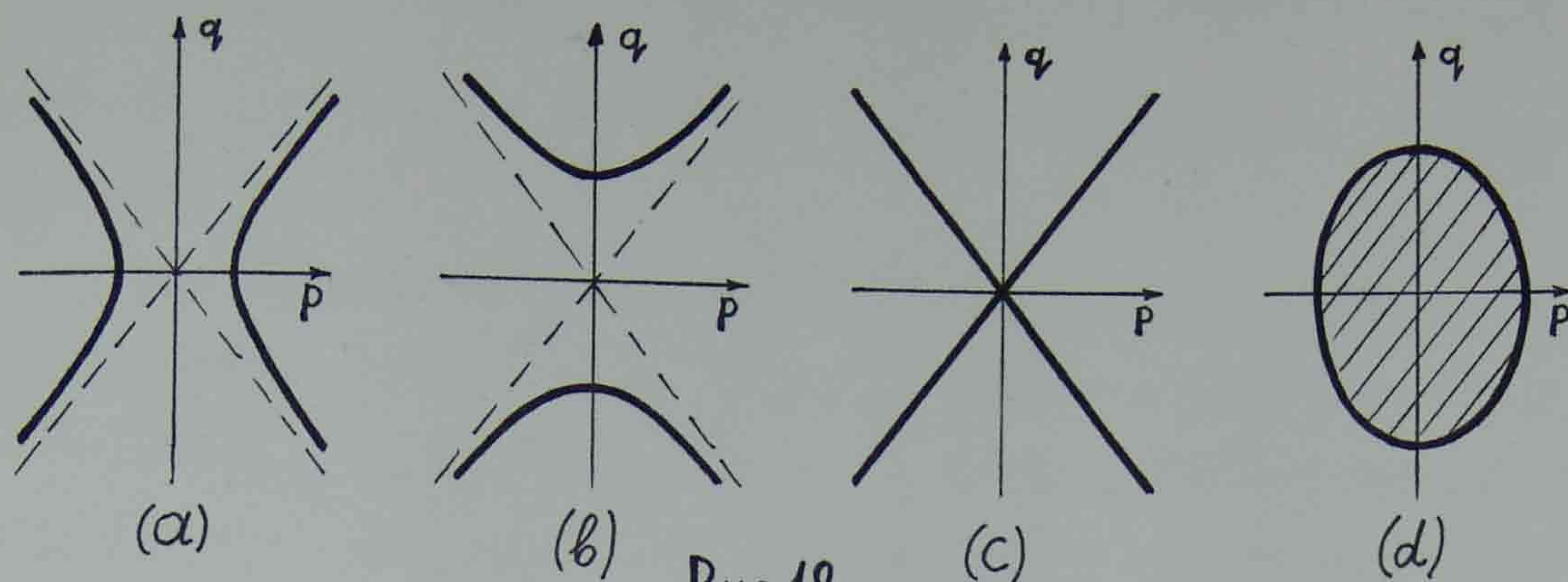


Рис. 19

Очевидно, условие (5.8) выполнено для всех $x \in (-1, 1)$, таких что $V''(x) > 0$. Если $V''(x) \leq 0$, то условие (5.8) равносильно тому, что действительная полуось гиперболы (5.9) не меньше соответствующей полуоси эллипса (5.10). В случае $V'(x) > 0$ получаем:

$$(1+x) \sqrt{V'(x)} \geq \sqrt{-\frac{1}{2} V''(x) (1+x)^3}.$$

Отсюда: $V''(x) \geq -\frac{2 V'(x)}{1+x}$. Аналогично, если $V'(x) < 0$, то

получаем: $V''(x) \geq \frac{2 V'(x)}{1-x}$. Очевидно, эти неравенства можно объединить в одно неравенство (5.7). При этом, если верно неравенство $V''(x) > 0$, то тем более верно (5.7). Теорема доказана.

Можно рассмотреть также гамильтонианы вида

$$H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + \lambda S_3 + V(R_3). \quad (5.11)$$

С л е д с т в и е. Утверждение теоремы 5 справедливо для гамильтонианов (5.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что гамильтониан (5.11) есть линейная комбинация гамильтониана (5.1) и интеграла $K = S_3$. Поэтому отображение момента $H \times K$ для гамильтониана (5.11) есть композиция отображения момента $H \times K$ для гамильтониана (5.1) и линейного отображения плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ в себя с

матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку невырожденное линейное преобразование не влияет на индексы критических окружностей, то следствие доказано.

Гамильтониан обычного случая Лагранжа есть частный случай гамильтониана (5.1), когда $V(x)$ — линейная функция. Тогда $V''(x) \equiv 0$, то есть условие (5.7) выполнено. Поэтому на Рис. 2 (стр. 28) приведен полный набор разделяющих кривых для случая Лагранжа. Слова-молекулы для всех областей на Рис. 2: $A - A$. На Рис. 20 приведено несколько возможных (при различных значениях q и β) бифуркационных диаграмм отображения $H \times K$ для гамильтониана $H = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{\beta}) + R_3$. Жирными точками на Рис. 20 обозначены образы точек $(0, 0, \pm q, 0, 0, \pm 1)$.

Отметим, в заключение, что условие $V''(x) \geq 0$ является достаточным для выполнения условия (5.7), но не является необходимым. Например, рассматривая возмущение потенциала $V(x) = x$ (классический случай Лагранжа) вида $V_\varepsilon(x) = x + \varepsilon x^3$, из условия (5.7) получаем: $-\frac{1}{9} \leq \varepsilon \leq \frac{8}{3}$.

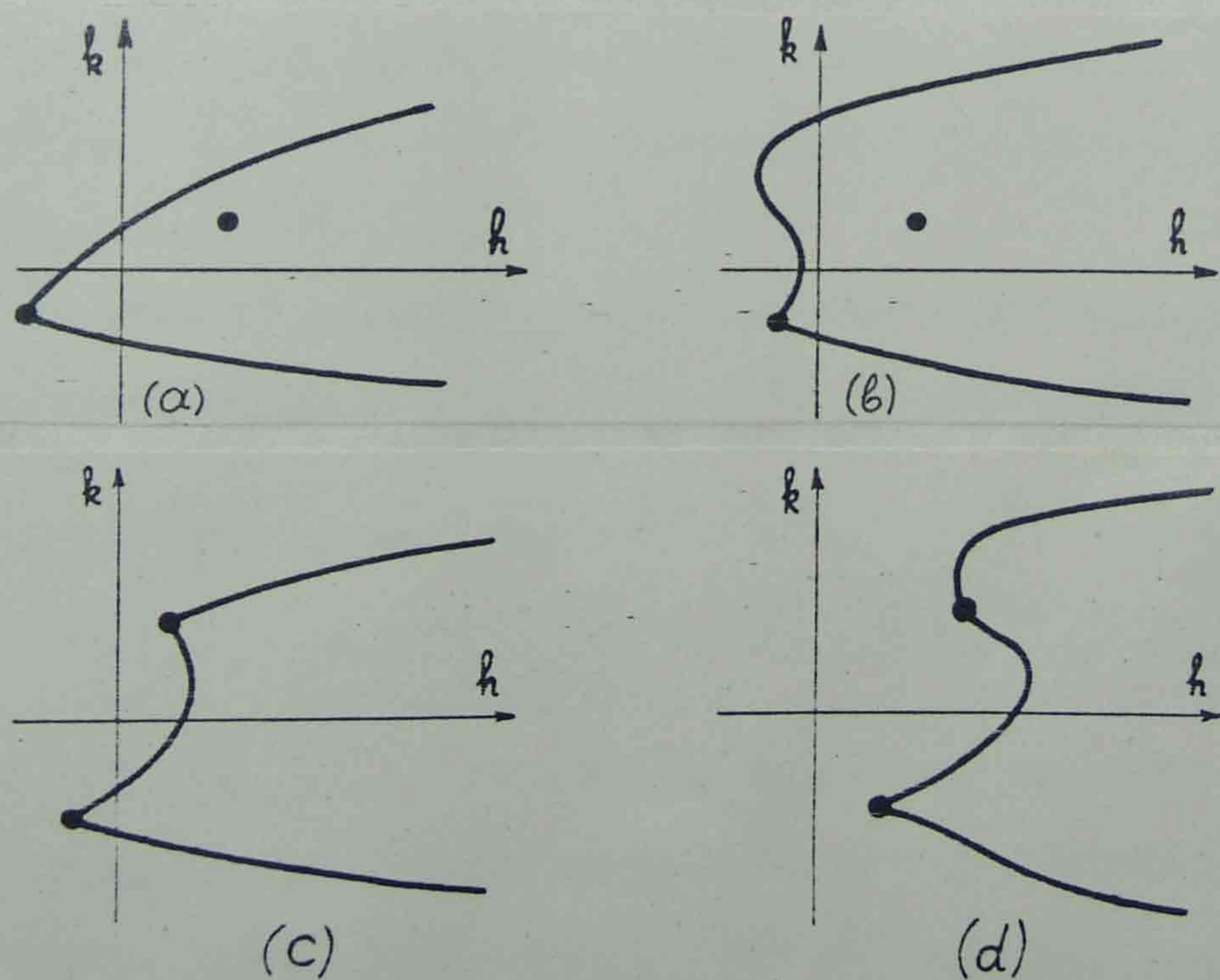


Рис. 20

§ 6. Случай Клебша.

В гамильтониан случая Клебша (I.18) входят 4 параметра: $A_1, A_2, A_3, \varepsilon$. Полагая $A'_i = \sqrt{|\varepsilon|} A_i$, и поделив гамильтониан на $\sqrt{|\varepsilon|}$, мы получаем гамильтониан (I.18) случая Клебша с параметрами A'_1, A'_2, A'_3 и $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, можно исследовать лишь гамильтонианы с $\varepsilon = \pm 1$, для которых в §2 уже построены кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(q, h)$, разделяющие области с различным топологическим типом Q^3 (см. Рис. 7 и Рис. 8 на стр. 39, 40).

Как уже отмечалось, зная, как устроена бифуркационная диаграмма отображения момента $H \times K : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, можно легко получить бифуркационную диаграмму для системы с гамильтонианом $H' = \alpha H + \beta K$, где α, β — некоторые константы. Она получается из исходной диаграммы при некотором линейном невырожденном линейном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$. Нас интересует лишь то, как перестраиваются торы Лиувилля при движении точки вдоль прямой $h = \text{const}$ в прообразе этой точки. Поэтому инвариант Фоменко для гамильтониана H' можно описать, определив, как прямая $\alpha h + \beta k = \text{const}$ пересекает бифуркационную диаграмму отображения $H \times K$.

Все гамильтонианы случая Клебша можно получить, например, в виде линейной комбинации $\alpha H_0 + \beta K_0$ коммутирующих функций

$$H_0 = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + (c_1 R_1^2 + c_2 R_2^2 + c_3 R_3^2),$$

$$K_0 = (c_1 S_1^2 + c_2 S_2^2 + c_3 S_3^2) - (c_1^2 R_1^2 + c_2^2 R_2^2 + c_3^2 R_3^2),$$

где $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. На Рис. 2I показано, какой из гамильтонианов случая Клебша получается при различных значениях α, β . Если прямая $\alpha h + \beta k = 0$ лежит в области I, то $\alpha H_0 + \beta K_0$ есть гамильтониан (I.18) с $\varepsilon = 1$, а если в области II, то

$\alpha H_0 + \beta K_0$ — гамильтониан (I.18) с $\varepsilon = -1$. Для прямых, лежащих в заштрихованной области, среди поверхностей Q^3 будут некомпактные. Такие линейные комбинации мы не рассматриваем.

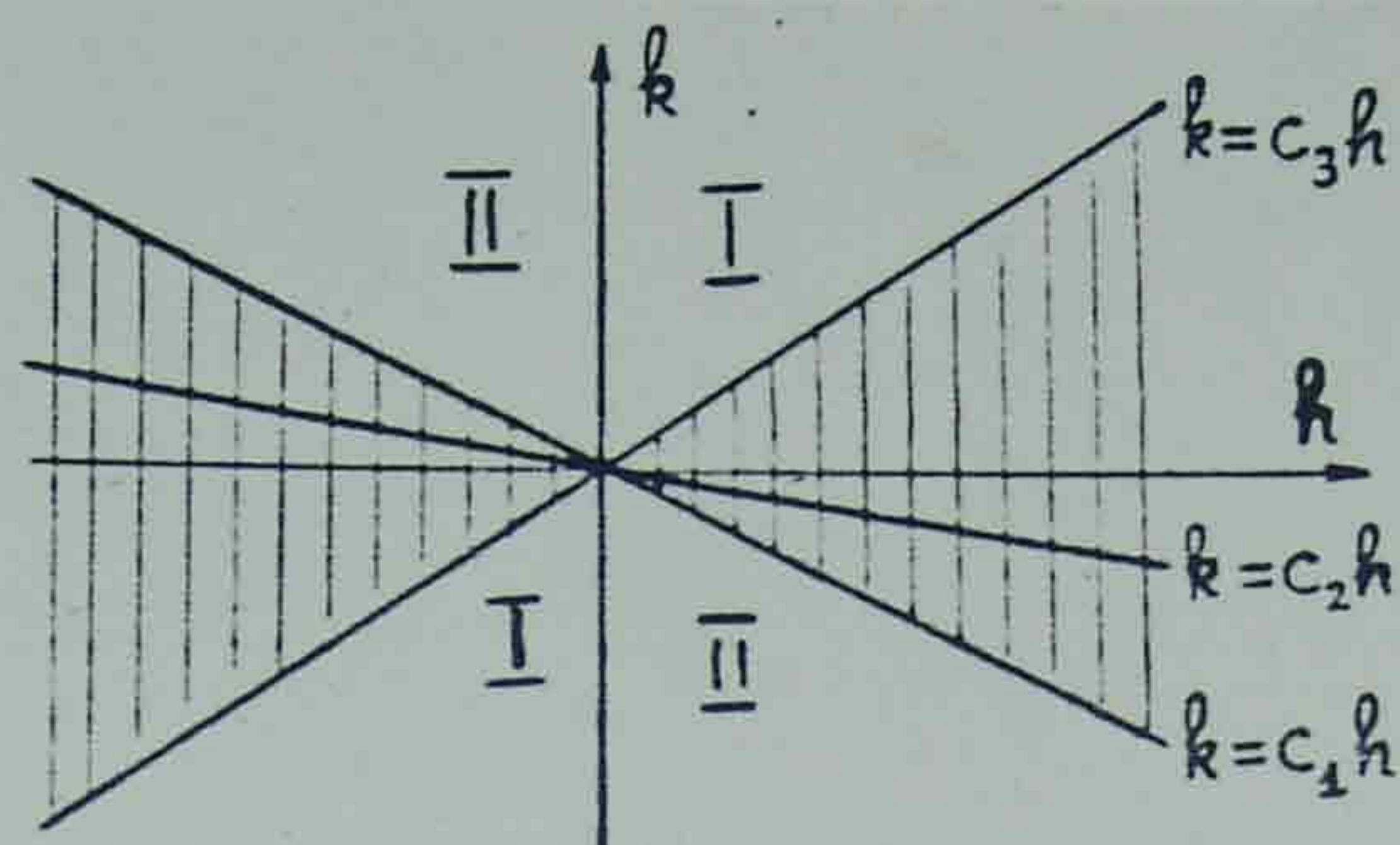


Рис. 21

Бифуркационные диаграммы для случая Клебша были построены и исследованы в [7-9]. Для отображения $H_0 \times K_0 : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$ они приведены на Рис. 22. Возможны три качественно различных случая: (а) $g^2 > p_2$; (б) $p_1 < g^2 < p_2$; (с) $g^2 < p_1$. Здесь p_1 и p_2 — некоторые константы, зависящие от параметров c_1 , c_2 , c_3 гамильтониана H_0 . При $f_2 = g$ и $f_2 = -g$ диаграммы полностью совпадают. Асимптотами бифуркационной кривой являются три прямые: $k = c_1 h + c_2 c_3$, $k = c_2 h + c_3 c_1$, $k = c_3 h + c_1 c_2$. Три жирные точки на Рис. 22 — это образы точек, в которых $\text{grad } H_0$ и $\text{grad } K_0$ равны нулю на TS^2 . Они имеют координаты: $(g^2 + c_i, c_i(g^2 - c_i)) \in \mathbb{R}^2(h, k)$. Перестройки торов Лиувилля указаны на Рис. 22.

Рассматривая различные прямые $\alpha h + \beta k = c$, можно определить инварианты Пуанкаре для гамильтонианов $\alpha H_0 + \beta K_0$ при различных значениях c . Инвариант может изменяться либо, когда c — критическое значение функции $\alpha H_0 + \beta K_0$, либо, когда прямая $\alpha h + \beta k = c$ проходит через точку возврата кривой. Построив разделяющую кривую, соответствующую точкам возврата бифуркационной диаграммы, мы получаем описание инварианта Пуанкаре для случая Клебша.

$\alpha H_0 + \beta K_0$ - гамильтониан (I.18) с $\varepsilon = -1$. Для прямых, лежащих в заштрихованной области, среди поверхностей Q^3 будут некомпактные. Такие линейные комбинации мы не рассматриваем.

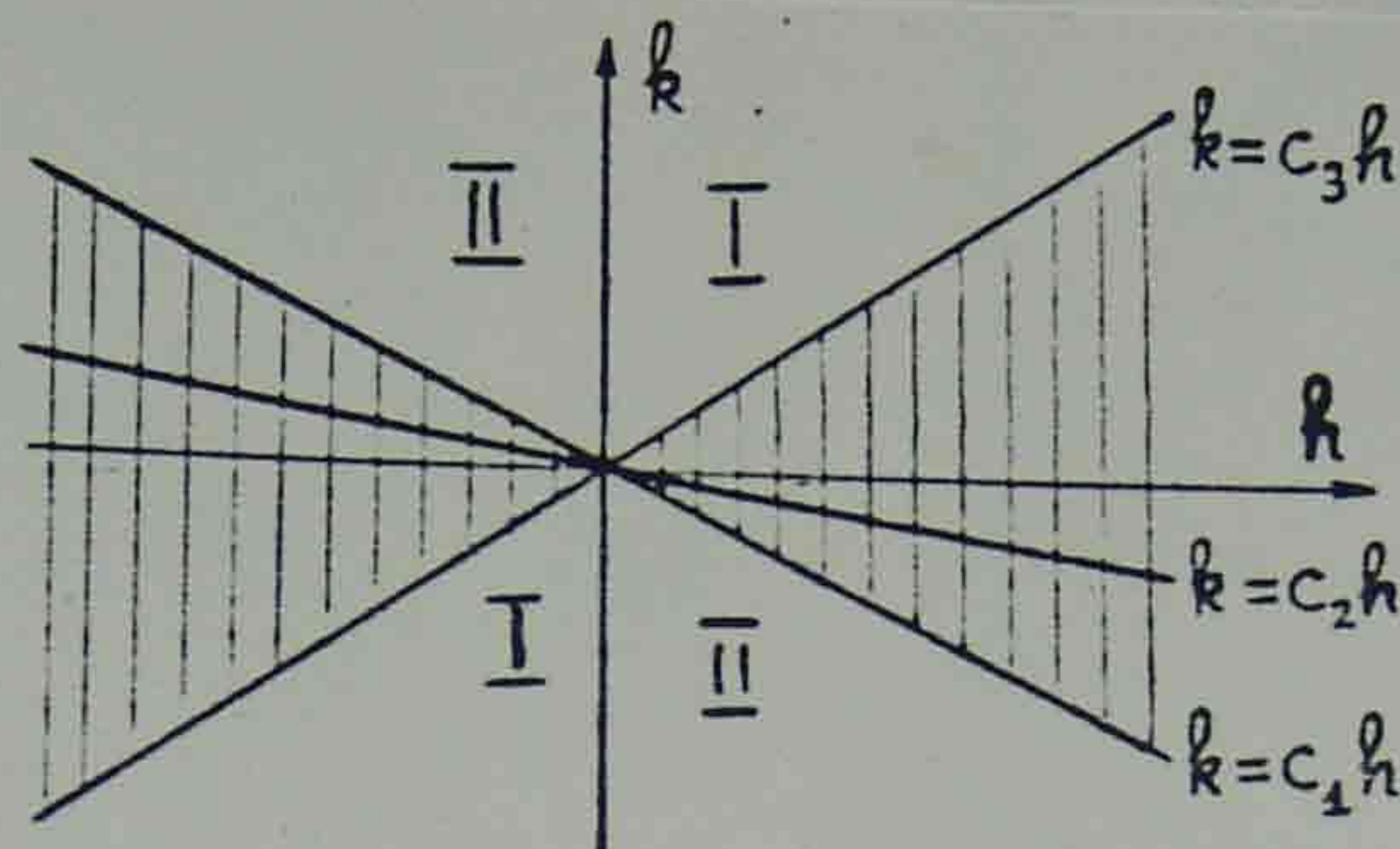


Рис. 21

Бифуркационные диаграммы для случая Клебша были построены и исследованы в [7-9]. Для отображения $H_0 \times K_0 : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$ они приведены на Рис. 22. Возможны три качественно различных случая: (а) $g^2 > p_2$; (б) $p_1 < g^2 < p_2$; (в) $g^2 < p_1$. Здесь p_1 и p_2 - некоторые константы, зависящие от параметров c_1 , c_2 , c_3 гамильтониана H_0 . При $f_2 = g$ и $f_2 = -g$ диаграммы полностью совпадают. Асимптотами бифуркационной кривой являются три прямые: $k = c_1 h + c_2 c_3$, $k = c_2 h + c_3 c_1$, $k = c_3 h + c_1 c_2$. Три жирные точки на Рис. 22 - это образы точек, в которых $\text{grad } H_0$ и $\text{grad } K_0$ равны нулю на TS^2 . Они имеют координаты: $(g^2 + c_i, c_i(g^2 - c_i)) \in \mathbb{R}^2(h, k)$. Перестройки торов Лиувилля указаны на Рис. 22.

Рассматривая различные прямые $\alpha h + \beta k = c$, можно определить инварианты Фоменко для гамильтонианов $\alpha H_0 + \beta K_0$ при различных значениях c . Инвариант может изменяться либо, когда c - критическое значение функции $\alpha H_0 + \beta K_0$, либо, когда прямая $\alpha h + \beta k = c$ проходит через точку возврата кривой. Построив разделяющую кривую, соответствующую точкам возврата бифуркационной диаграммы, мы получаем описание инварианта Фоменко для случая Клебша.

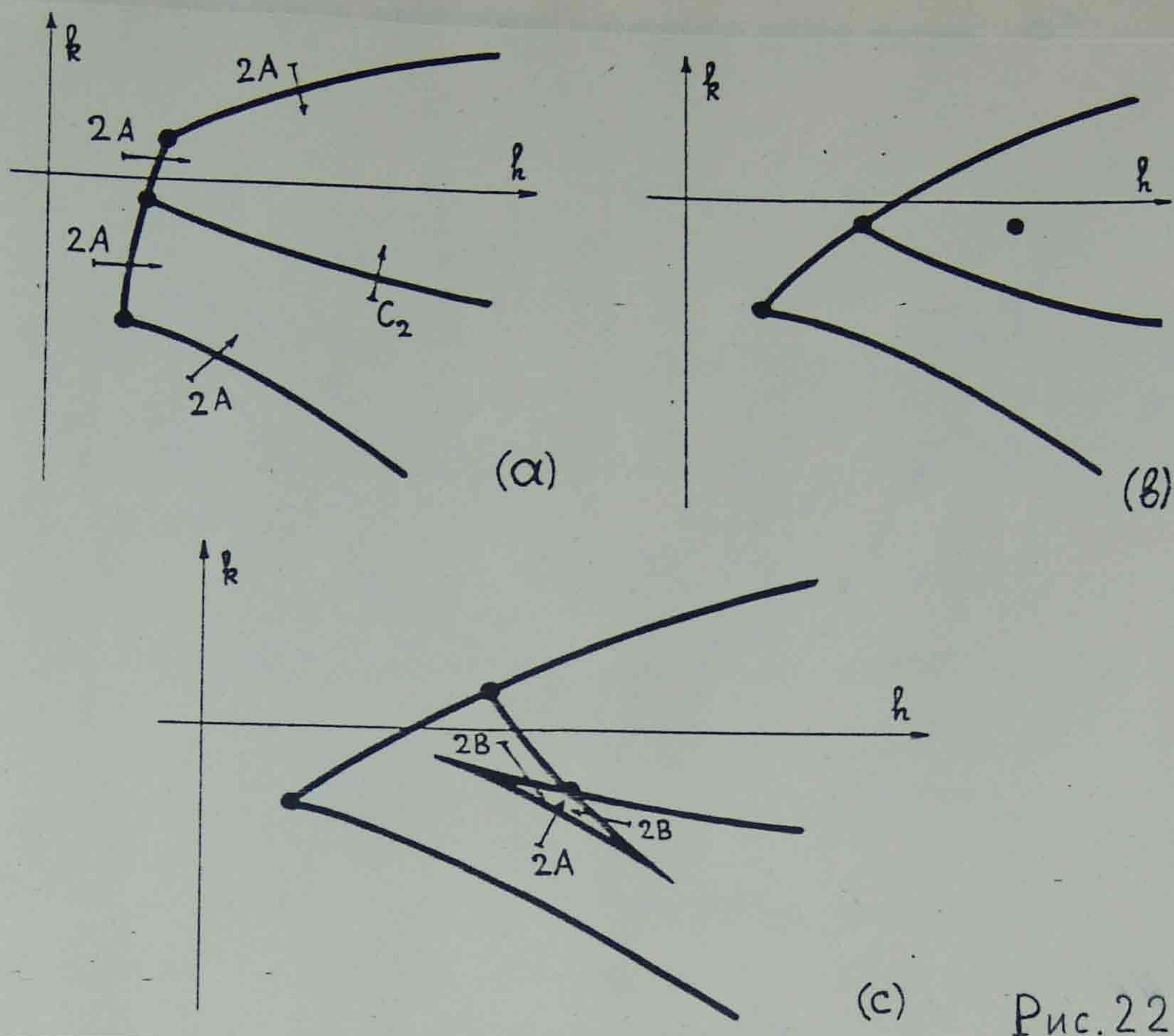
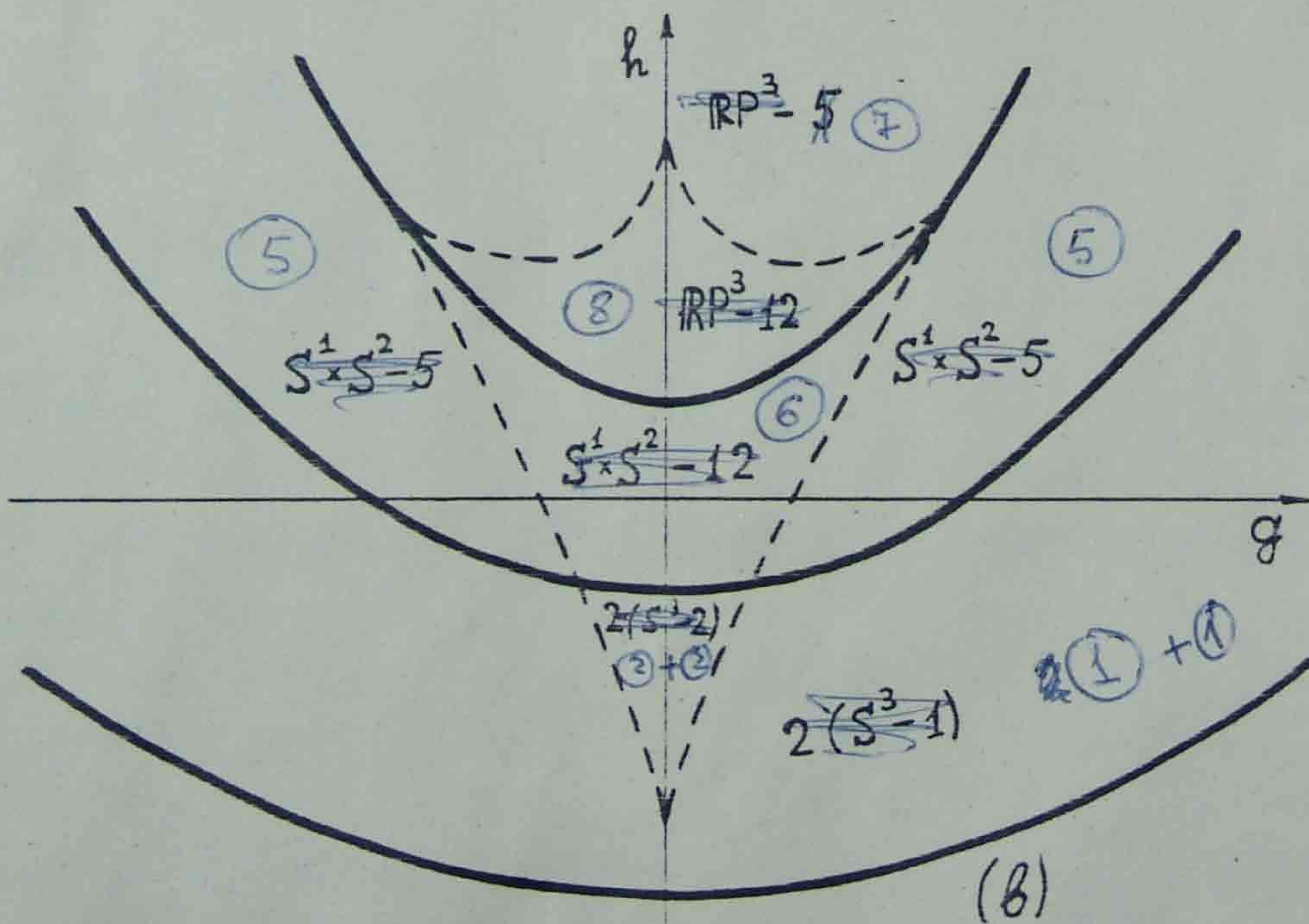
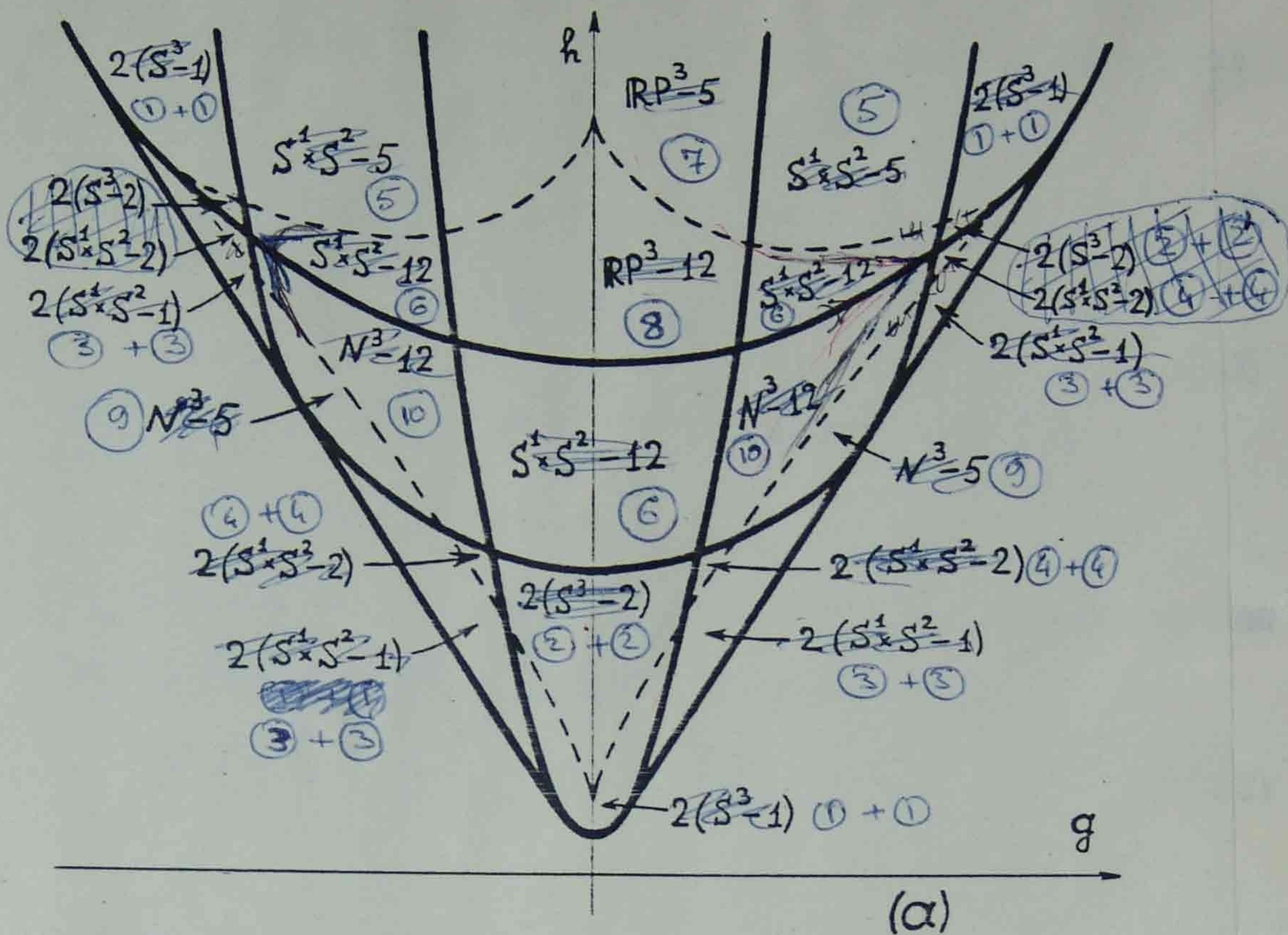


Рис. 22

Т е о р е м а 6. Разделяющие кривые и инварианты для гамильтонианов (I.18) (случай Клебша) имеют вид, указанный на Рис. 23 ((a) $\varepsilon = 1$; (b) $\varepsilon = -1$). Дополнительный интеграл боттовский на всех изоэнергетических поверхностях $Q^3 = \{I_1 = 1, I_2 = g, H = h\}$, для которых точка (g, h) не принадлежит разделяющим кривым. Список инвариантов для случая Клебша состоит из 10 пар: $S^3 - 1$; $S^3 - 2$; $S^1 \times S^2 - 1$; $S^1 \times S^2 - 2$; $S^1 \times S^2 - 5$; $S^1 \times S^2 - 12$; $RP^3 - 5$; $RP^3 - 12$; $N^3 - 5$; $N^3 - 12$.

Замечание: пунктирная кривая разделяющая области с различными инвариантами Фоменко может быть "меньших размеров" и соответственно пересекать меньшее количество кривых, разделяющих области с различным топологическим типом изоэнергетических поверхностей Q^3 . На Рис. 23 изображен тот случай, когда пунктирная кривая пересекает максимально возможное количество кривых, раз-

деляющих области с различным топологическим типом Q^3 .



§ 7. Случай Стеклова.

В гамильтониан случая Стеклова (I.19) входят 4 параметра: $A_1, A_2, A_3, \varepsilon$. Рассмотрим следующие функции:

$$H_0 = \alpha_1 S_1^2 + \alpha_2 S_2^2 + \alpha_3 S_3^2 + 2(\alpha_1^2 S_1 R_1 + \alpha_2^2 S_2 R_2 + \alpha_3^2 S_3 R_3) + \alpha_1^3 R_1^2 + \alpha_2^3 R_2^2 + \alpha_3^3 R_3^2, \quad (7.1)$$

$$K_0 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2(\alpha_1 S_1 R_1 + \alpha_2 S_2 R_2 + \alpha_3 S_3 R_3) - 3(\alpha_1^2 R_1^2 + \alpha_2^2 R_2^2 + \alpha_3^2 R_3^2),$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Как и в случае Клебша, любой гамильтониан случая Стеклова можно представить в виде

$$H = \alpha H_0 + \beta K_0 + \gamma f_1 + \delta f_2, \quad (7.2)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{3} (2A_2 A_3 - A_3 A_1 - A_1 A_2), \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon}{3} (2A_3 A_1 - A_1 A_2 - A_2 A_3),$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon}{3} (2A_1 A_2 - A_2 A_3 - A_3 A_1), \quad \alpha = \frac{1}{2\varepsilon A_1 A_2 A_3},$$

$$\beta = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right), \quad \gamma = \varepsilon^2 \left(\frac{2(A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1)^3}{27 A_1 A_2 A_3} - A_1 A_2 A_3 \right),$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{9} \left(5(A_1 + A_2 + A_3) - 2 \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_3 A_1}{A_2} + \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \right).$$

В этом параграфе будут построены бифуркационные диаграммы отображения

$$K_0 \times H_0 : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h), \quad (7.3)$$

где H_0 и K_0 заданы на $TS^2 = \{f_1 = 1, f_2 = g\} \subset \mathbb{R}^6(S, R)$.

Зная бифуркационные диаграммы отображения (7.3), инвариант Со-менко для гамильтониана (7.2) можно описать, определив, как пе-

рестраиваются торы Лиувилля в прообразе точки, движущейся вдоль прямой $\alpha h + \beta k = \text{const}$. Будем предполагать, что параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, входящие в выражения (7.1), удовлетворяют условию

$$\alpha_1 < 0 \leq \alpha_2 < \alpha_3. \quad (7.4)$$

Общий случай сводится к этому заменой переменных. Кроме того: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Найдем сначала критические точки функции K_0 на TS^2 . Решая систему

$$\begin{cases} \text{grad } K_0 = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g \end{cases},$$

получаем, что для любого значения g существуют 6 критических точек:

$$\begin{aligned} &(\pm g, 0, 0, \pm 1, 0, 0), (0, \pm g, 0, 0, \pm 1, 0), \\ &(0, 0, \pm g, 0, 0, \pm 1) \in \mathbb{R}^6(S, R). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Кроме того, при различных значениях g существуют следующие критические точки:

$$\begin{aligned} &(0, (\alpha_1 - \alpha_3)u_1, (\alpha_1 - \alpha_2)v_1, 0, u_1, v_1), \quad \alpha_1 - \alpha_3 \leq g \leq \alpha_1 - \alpha_2; \\ &((\alpha_2 - \alpha_3)v_2, 0, (\alpha_2 - \alpha_1)u_2, v_2, 0, u_2), \quad \alpha_2 - \alpha_3 \leq g \leq \alpha_2 - \alpha_1; \\ &((\alpha_3 - \alpha_2)u_3, (\alpha_3 - \alpha_1)v_3, 0, u_3, v_3, 0), \quad \alpha_3 - \alpha_2 \leq g \leq \alpha_3 - \alpha_1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь через u_i, v_i обозначено

$$u_1^2 = \frac{g + \alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3}, \quad u_2^2 = \frac{g + \alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}, \quad u_3^2 = \frac{g + \alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$v_1^2 = \frac{g + a_3 - a_1}{a_3 - a_2}, \quad v_2^2 = \frac{g + a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad v_3^2 = \frac{g + a_2 - a_3}{a_2 - a_1}.$$

На Рис. 24 указано количество критических точек функции K_0 на TS^2 при различных значениях g .

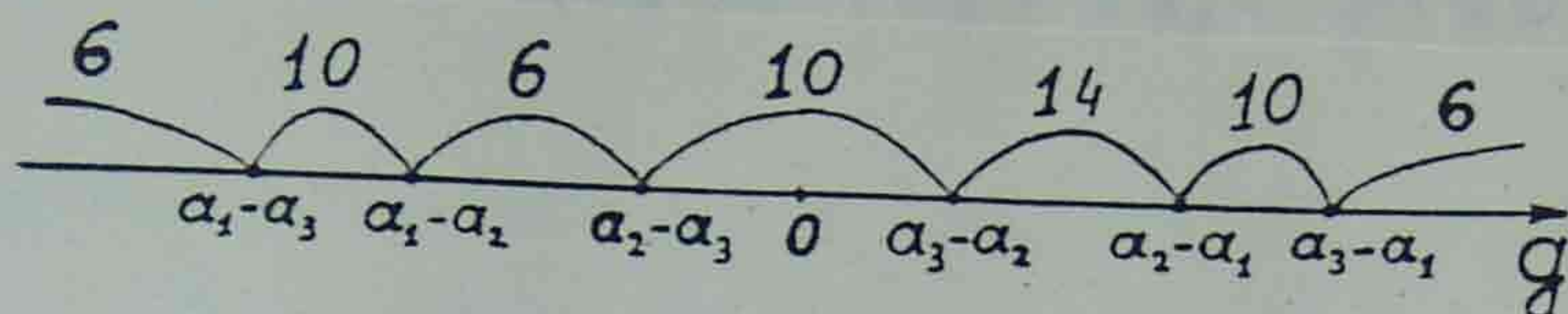


Рис. 24

Найдем теперь точки $(S, R) \in TS^2 \subset \mathbb{R}^6(S, R)$, в которых

$$\text{grad } H_0 = \mu \text{ grad } K_0 + \mu_1 \text{ grad } f_1 + \mu_2 \text{ grad } f_2, \quad (7.7)$$

где μ , μ_1 , μ_2 — некоторые коэффициенты. Условие (7.7) перепишем в виде

$$G_\mu \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix} = 0, \quad f_1(S, R) = 1, \quad f_2(S, R) = g, \quad (7.8)$$

где G_μ — матрица размера 6×6 :

$$\begin{pmatrix} a_1 - \mu & 0 & 0 & a_1^2 + \mu a_1 - \frac{1}{2} \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - \mu & 0 & 0 & a_2^2 + \mu a_2 - \frac{1}{2} \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \mu & 0 & 0 & a_3^2 + \mu a_3 - \frac{1}{2} \mu_2 \\ a_1^2 + \mu a_1 - \frac{1}{2} \mu_2 & 0 & 0 & a_1^3 - \mu_1 + 3\mu a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 + \mu a_2 - \frac{1}{2} \mu_2 & 0 & 0 & a_2^3 - \mu_1 + 3\mu a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 + \mu a_3 - \frac{1}{2} \mu_2 & 0 & 0 & a_3^3 - \mu_1 + 3\mu a_3^2 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Система (7.8) имеет ненулевое решение только тогда, когда

$\det G_\mu = 0$. Это равносильно выполнению одного или нескольких

из трех условий:

$$\begin{aligned} (\alpha_1^3 + 3\mu\alpha_1^2 - \mu_1)(\alpha_1 - \mu) - (\alpha_1^2 + \mu\alpha_1 - \frac{\mu_2}{2})^2 &= 0, \\ (\alpha_2^3 + 3\mu\alpha_2^2 - \mu_1)(\alpha_2 - \mu) - (\alpha_2^2 + \mu\alpha_2 - \frac{\mu_2}{2})^2 &= 0, \\ (\alpha_3^3 + 3\mu\alpha_3^2 - \mu_1)(\alpha_3 - \mu) - (\alpha_3^2 + \mu\alpha_3 - \frac{\mu_2}{2})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если выполнено лишь одно из условий (7.10), то решениями системы (7.8) будут точки (7.5). Если выполнено ровно два из условий (7.10), то решениями системы (7.8) будут точки (7.6). Таким образом, осталось разобрать лишь случай, когда выполнены все три условия (7.10).

Легко показать, что выполнение всех трех условий (7.10) равносильно следующему:

$$\mu_1 = 4\mu^3, \quad \mu_2 = 4\mu^2 \quad (7.11)$$

Пусть пока $\mu \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Тогда, подставляя выражения (7.11) в систему (7.8), получаем

$$\begin{cases} S_1 = -(\alpha_1 + 2\mu)R_1 \\ S_2 = -(\alpha_2 + 2\mu)R_2 \\ S_3 = -(\alpha_3 + 2\mu)R_3 \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g \end{cases} \quad (7.12)$$

Уравнения (7.12) определяют двумерную сферу S^2 , целиком заполненную критическими точками отображения (7.3). Эта сфера отображается в кривую на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, заданную параметрически:

$$\begin{aligned} k &= -8\mu g - 12\mu^2, \quad h = -4\mu^2 g - 8\mu^3, \\ -(g + \alpha_3) &\leq 2\mu \leq -(g + \alpha_1). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Разберем теперь случай, когда $\mu = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ или $\mu = \alpha_3$ и выполнено (7.11). Пусть, например, $\mu = \alpha_1$, $\mu_1 = 4\alpha_1^3$, $\mu_2 = 4\alpha_1^2$. Тогда система (7.8) равносильна следующей:

$$\begin{cases} S_2 = (\alpha_3 - \alpha_1) R_2 \\ S_3 = (\alpha_2 - \alpha_1) R_3 \\ R_2^2 = \frac{t_1 R_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) R_1^2 + \alpha_2 - \alpha_1 - g}{\alpha_2 - \alpha_3} \\ R_3^2 = \frac{t_1 R_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) R_1^2 + \alpha_3 - \alpha_1 - g}{\alpha_3 - \alpha_2} \end{cases} \quad (7.14)$$

где через t_1 обозначено выражение $(S_1 + 3\alpha_1 R_1)$.

Система уравнений (7.14) выделяет в $TS^2 \subset \mathbb{R}^6(S, R)$ некоторое двумерное подмножество, состоящее из критических точек отображения (7.3). Вычисляя значения функций H_0 и K_0 в этих точках, получаем:

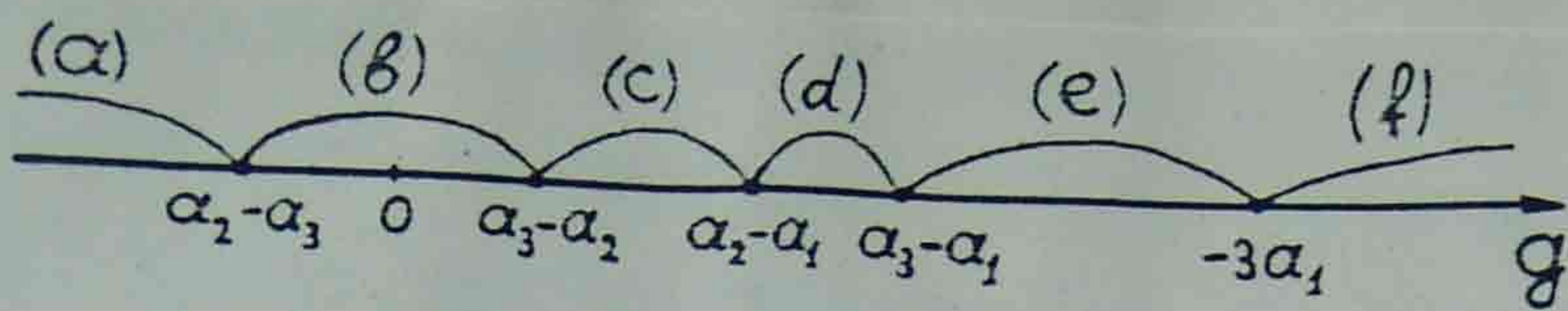
$$k = t_1^2 - 12\alpha_1^2 - 8g\alpha_1, \quad h = \alpha_1 t_1^2 - 8\alpha_1^3 - 4g\alpha_1^2. \quad (7.15)$$

Таким образом, множество (7.14) отображается при отображении момента $K_0 \times H_0$ в подмножество прямой $h = \alpha_1 k + 4\alpha_1^3 + 4g\alpha_1^2$.

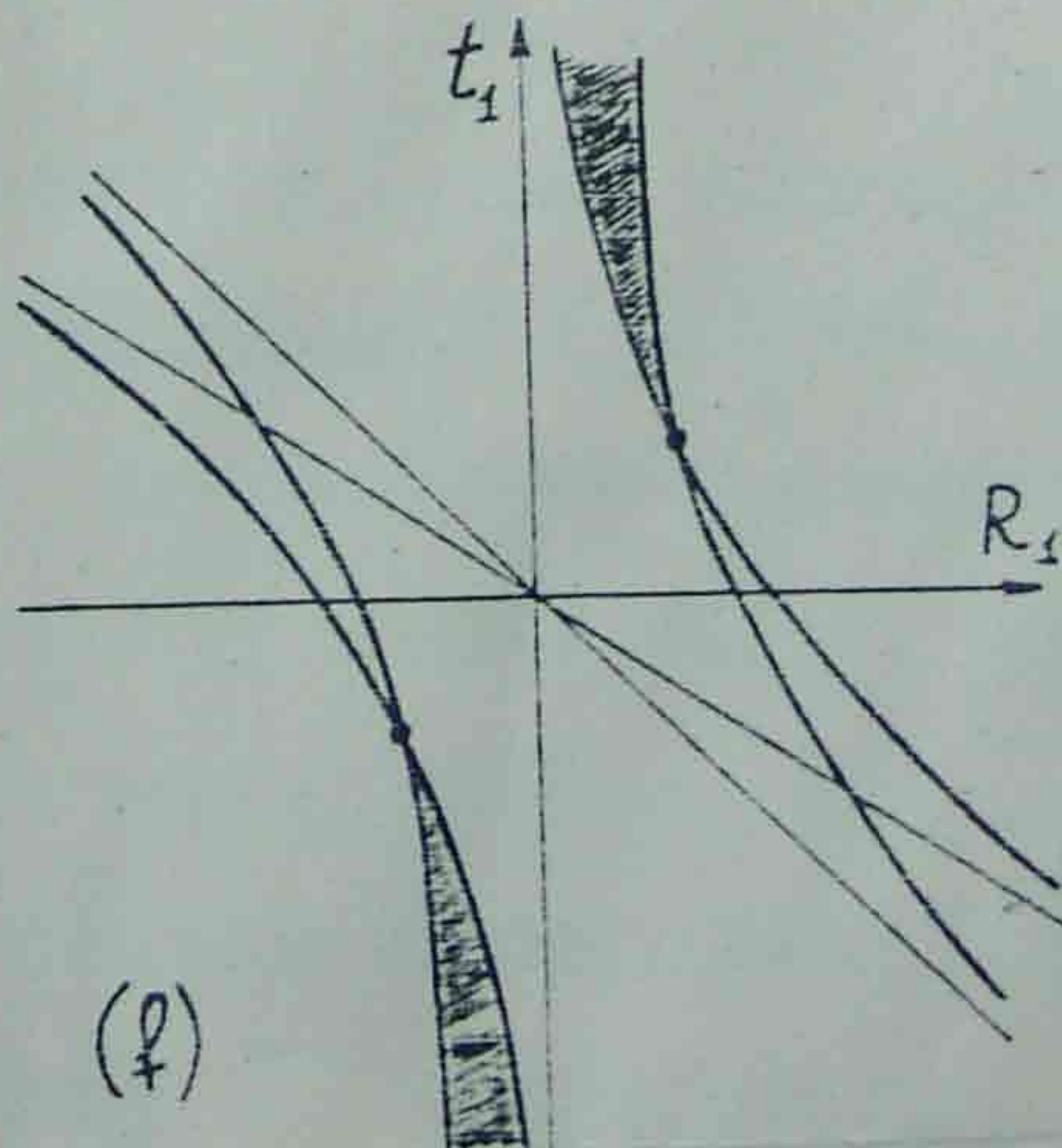
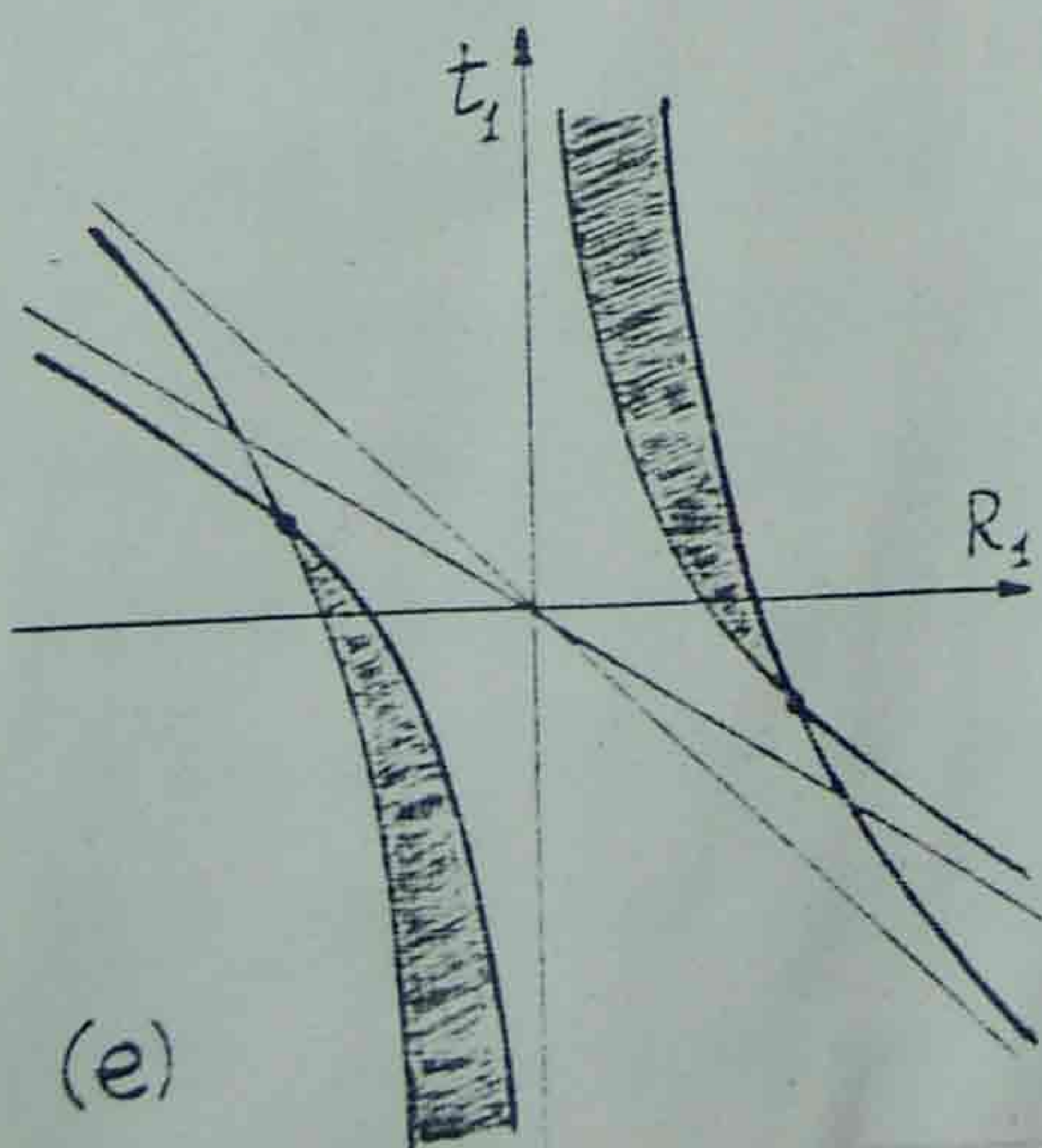
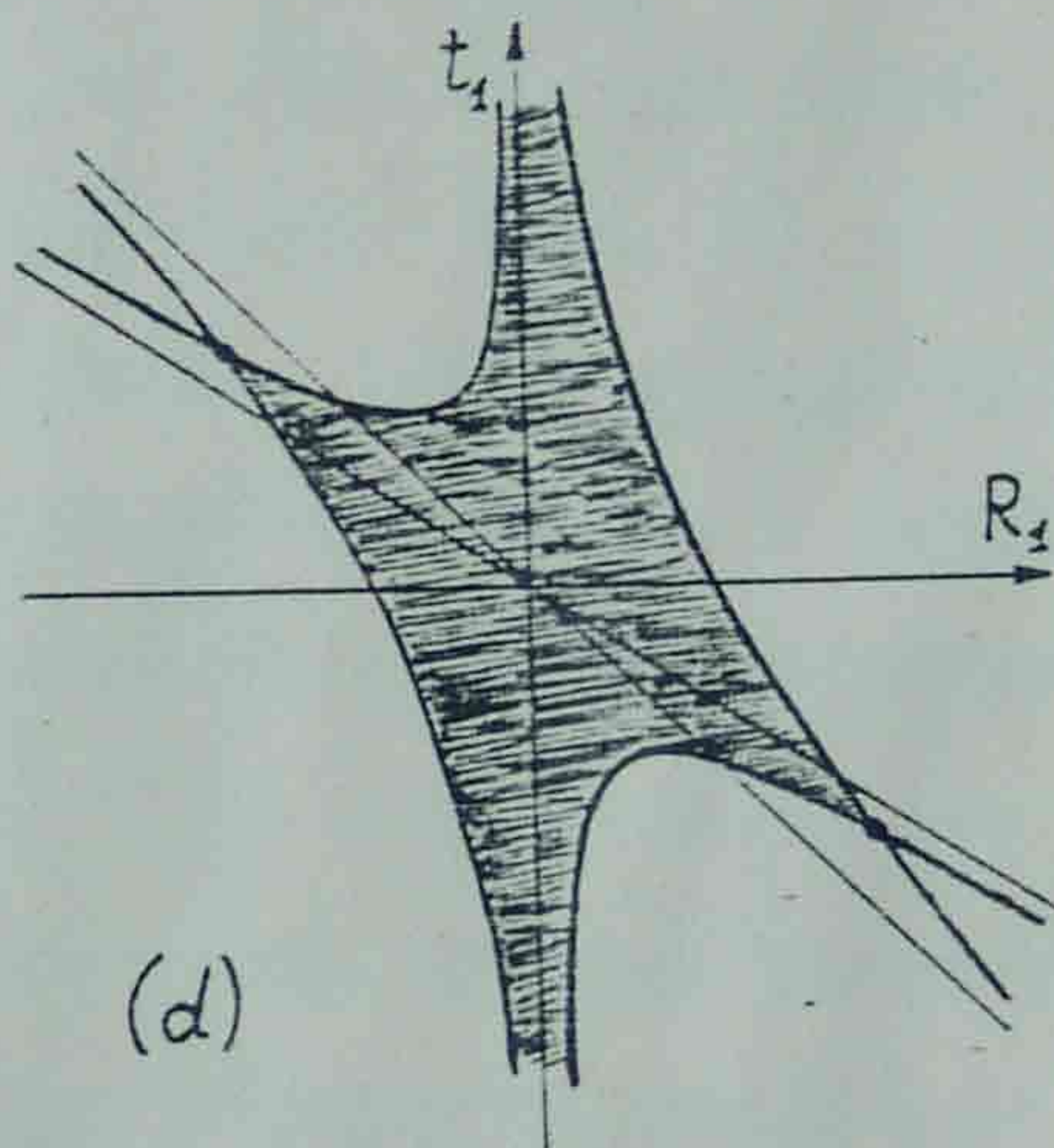
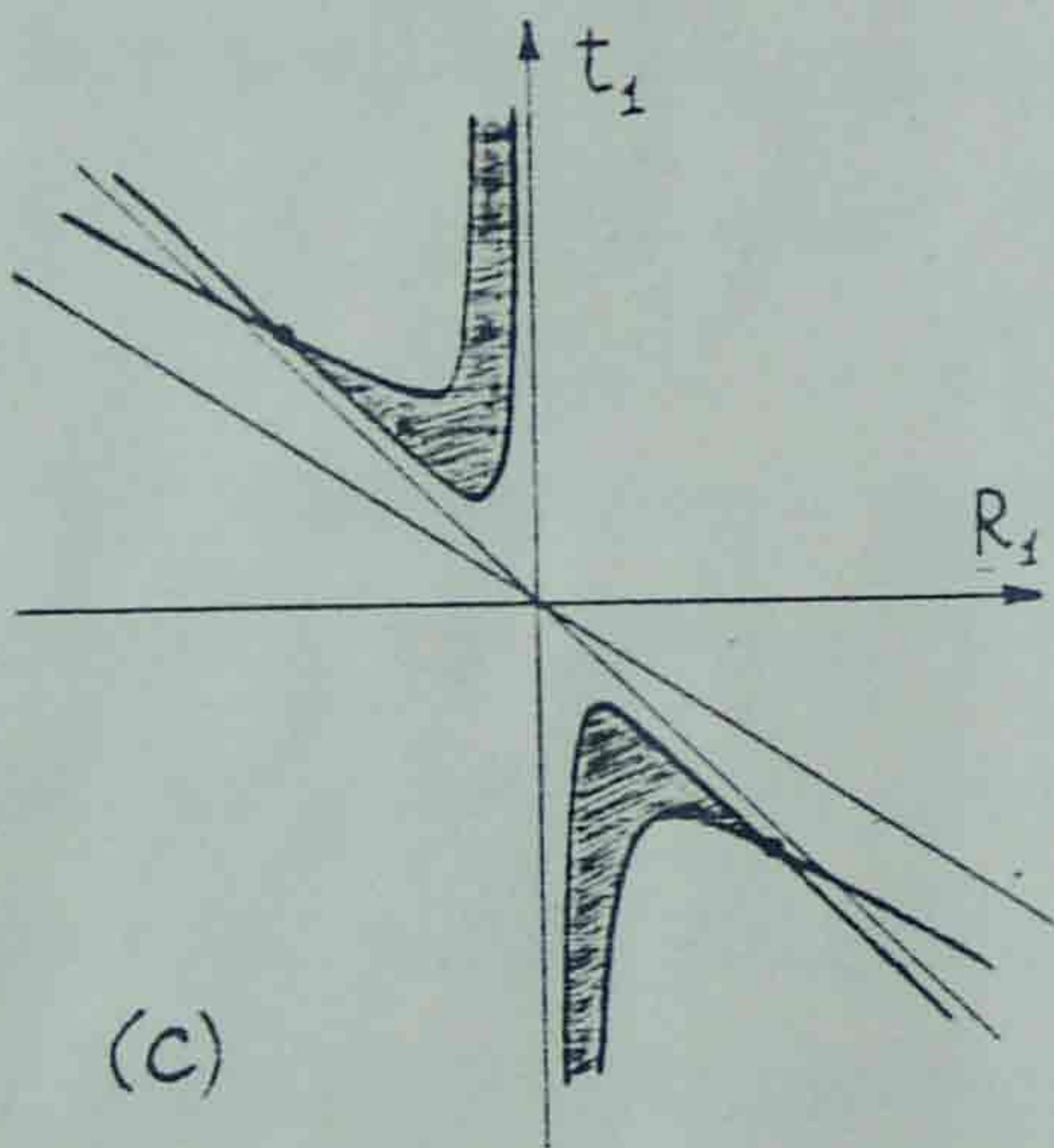
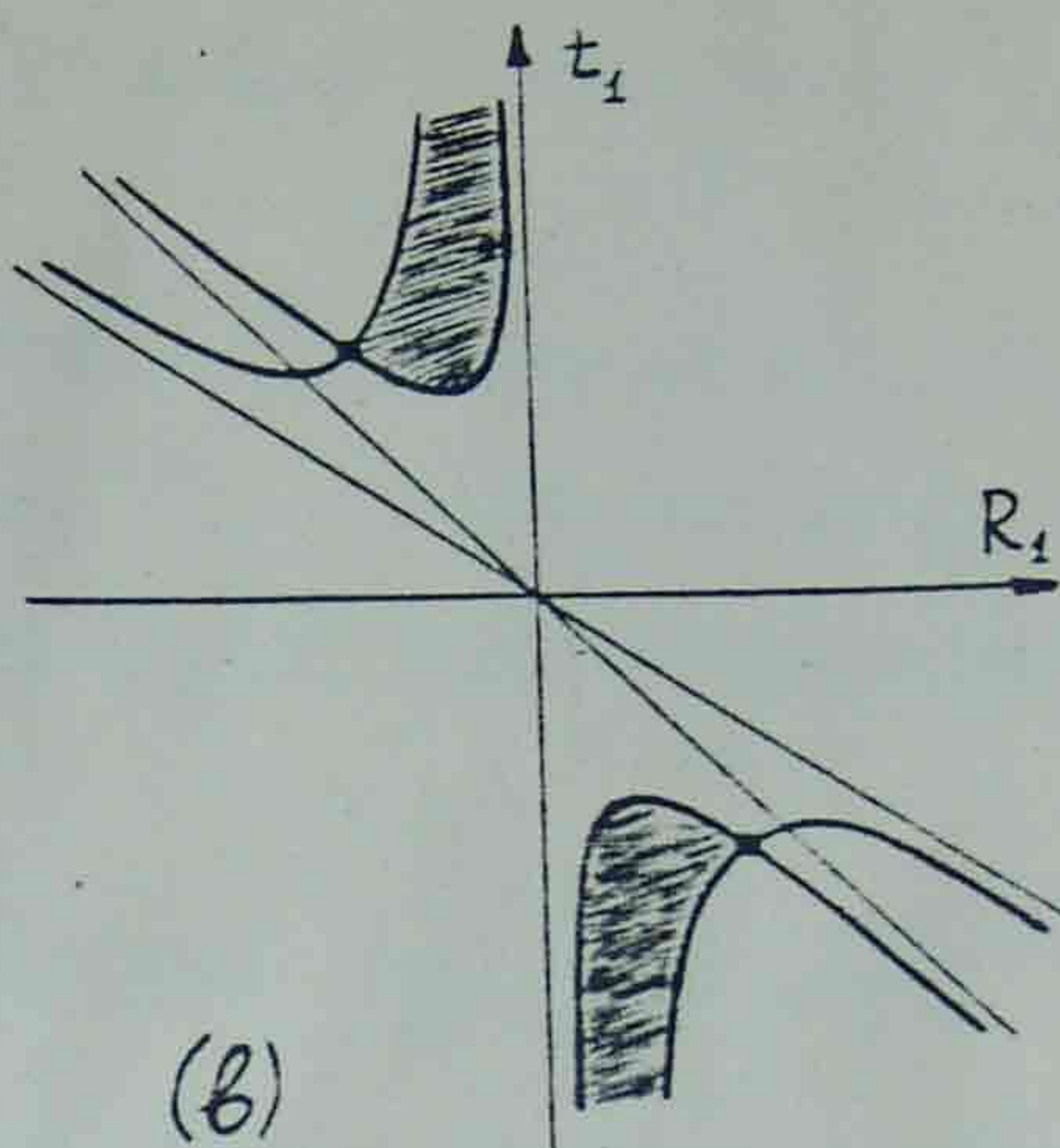
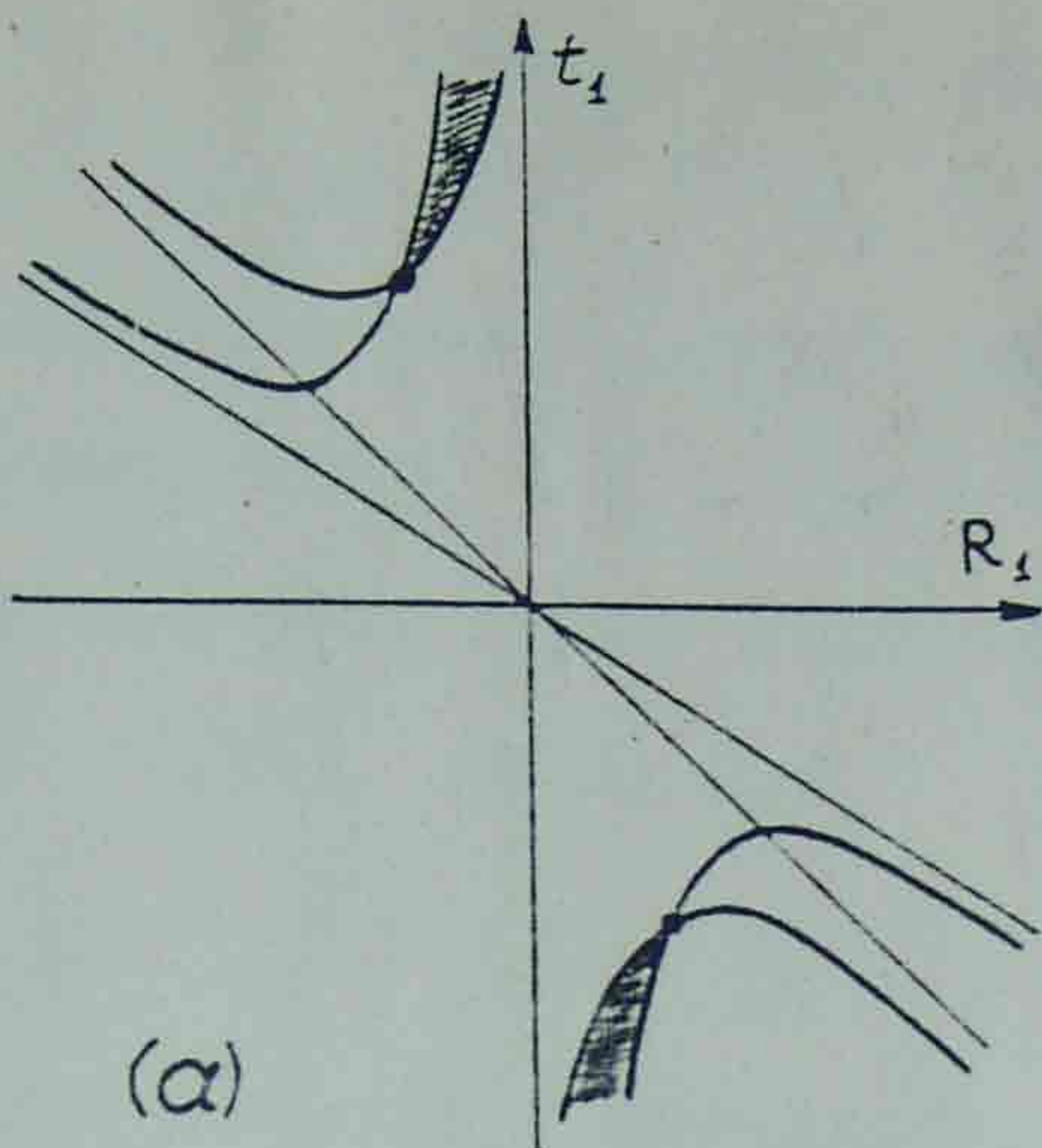
Для того, чтобы понять, какая часть этой прямой есть образ множества (7.14), необходимо определить, при каких t_1 система (7.14) имеет решение. Очевидно, что (7.14) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{t_1 R_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) R_1^2 + \alpha_2 - \alpha_1 - g}{\alpha_2 - \alpha_3} \geq 0 \\ \frac{t_1 R_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) R_1^2 + \alpha_3 - \alpha_1 - g}{\alpha_3 - \alpha_2} \geq 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

На Рис. 26 изображены области на плоскости (R_1, t_1) , выделяемые условиями (7.16) (на рисунке они заштрихованы). Различные картин-



PUC. 25



PUC. 26

ки соответствуют различным значениям g . Интервалы изменения g для каждого из вариантов (а)-(г) на Рис. 26 показаны на Рис. 25. Кривые, изображенные на Рис. 26, это гиперболы, имеющие асимптоты $t_1 = (a_1 - a_2) R_1$ и $t_1 = (a_1 - a_3) R_1$, а также общую асимптоту $R_1 = 0$. Точки пересечения гипербол имеют координаты $(\pm 1, \pm (g + 3a_1)) \in \mathbb{R}^2(R_1, t_1)$.

Пусть образ проекции заштрихованной области на ось $R_1 = 0$ есть множество $\{t_1 : |t_1| \geq T\}$, где T - некоторое неотрицательное число. Тогда образ множества (7.14) при отображении момента $K_0 \times H_0$ есть луч

$$\{h = a_1 k + 4a_1^3 + 4ga_1^2; \quad k \geq T - 12a_1^2 - 8ga_1\} \subset \mathbb{R}^2(k, h). \quad (7.17)$$

Из Рис. 26 можно определить, какой вид имеет множество критических точек отображения (7.3) в прообразе каждой точки луча.

Действительно, заштрихованная область на Рис. 26 есть образ множества (7.14) при проекции π на плоскость $\mathbb{R}^2(R_1, t_1)$. Из явных формул (7.14) для R_2^2 и R_3^2 легко понять, что в каждую внутреннюю точку заштрихованной области проектируется ровно 4 точки.

Если точка y , двигаясь по заштрихованной области, достигает границы, то 4 точки в ее прообразе $\pi^{-1}(y)$ сливаются в две точки. При этом разным гиперболам соответствует слияние различных точек. Несколько примеров того, как проектируется множество (7.14) в заштрихованную область для различных отрезков $t_1 = \text{const}$, показано на Рис. 27.

Разбирая аналогичным образом все случаи, можно понять, как устроено слоение множества (7.14) на окружности $t_1 = \text{const}$. Отсюда легко установить вид функции K_0 на множестве критических точек (7.14). Этот вид удобно описывать при помощи тех же графов Γ , которые кодируют перестройки торов Лиувилля (см. [11], [12]). Но в данной ситуации граф Γ кодирует перестройки окружностей, а не торов. Соответствующие графы Γ приведены на

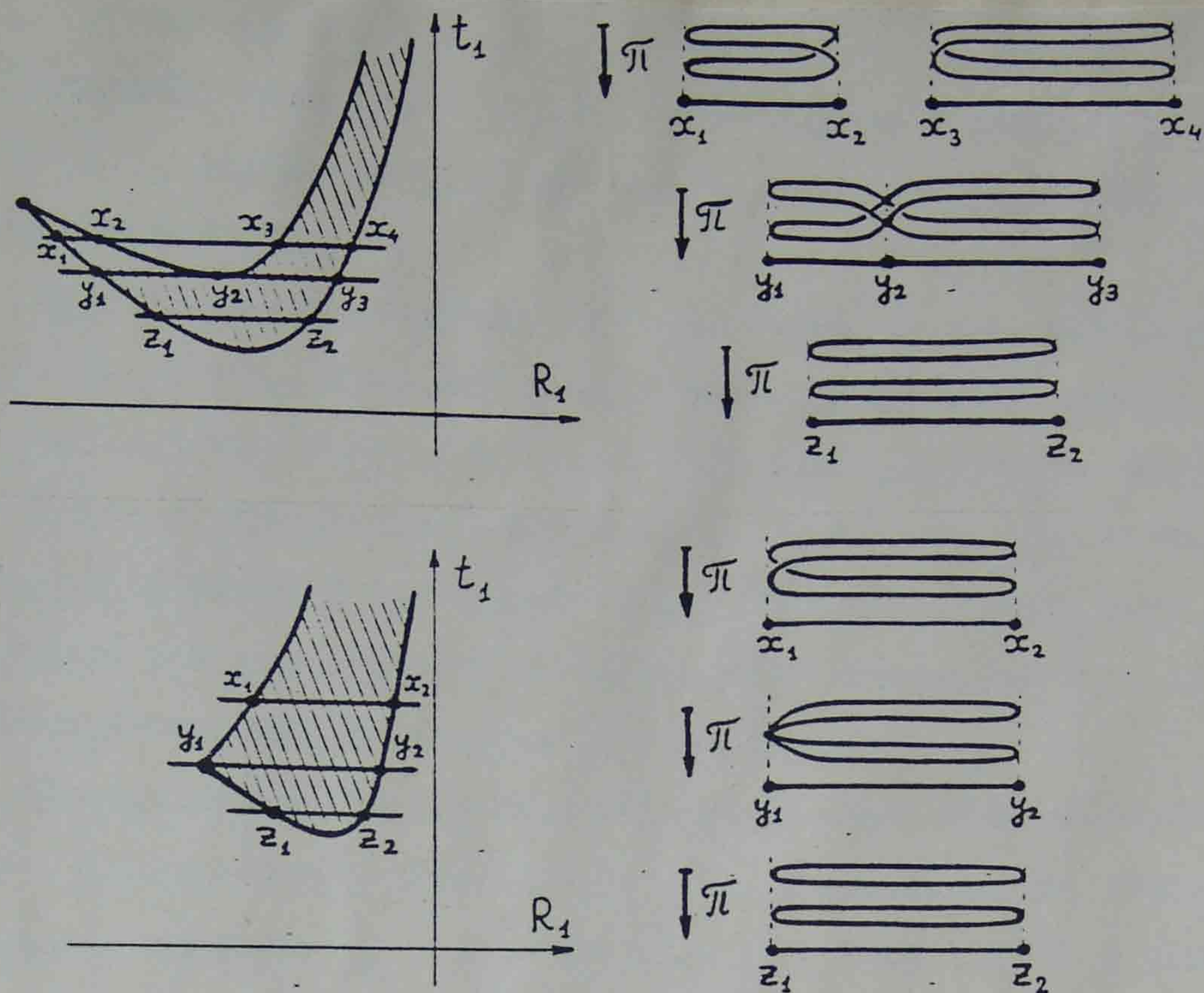


Рис. 27

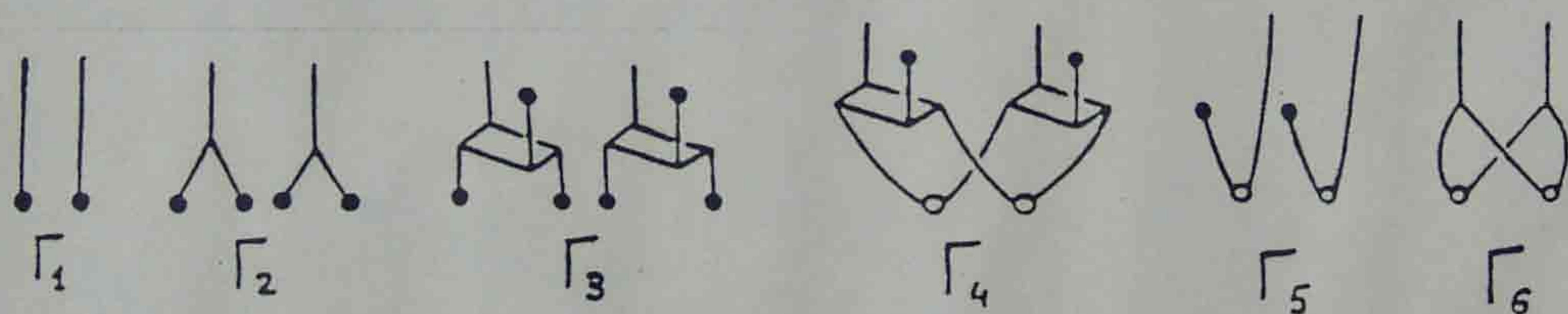


Рис. 28

Рис. 29

	$-3\alpha_3$	$\alpha_1 - \alpha_3$	$\alpha_1 - \alpha_2$	$-3\alpha_2$	$\alpha_2 - \alpha_3$	$\alpha_3 - \alpha_2$	$\alpha_2 - \alpha_1$	$\alpha_3 - \alpha_1$	$-3\alpha_1$	g
$\mu = \alpha_1$		Γ_1				Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_1
$\mu = \alpha_2$	Γ_1		Γ_2	Γ_6	Γ_6		Γ_2		Γ_1	
$\mu = \alpha_3$	Γ_1	Γ_5	Γ_4	Γ_6		Γ_2			Γ_1	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)

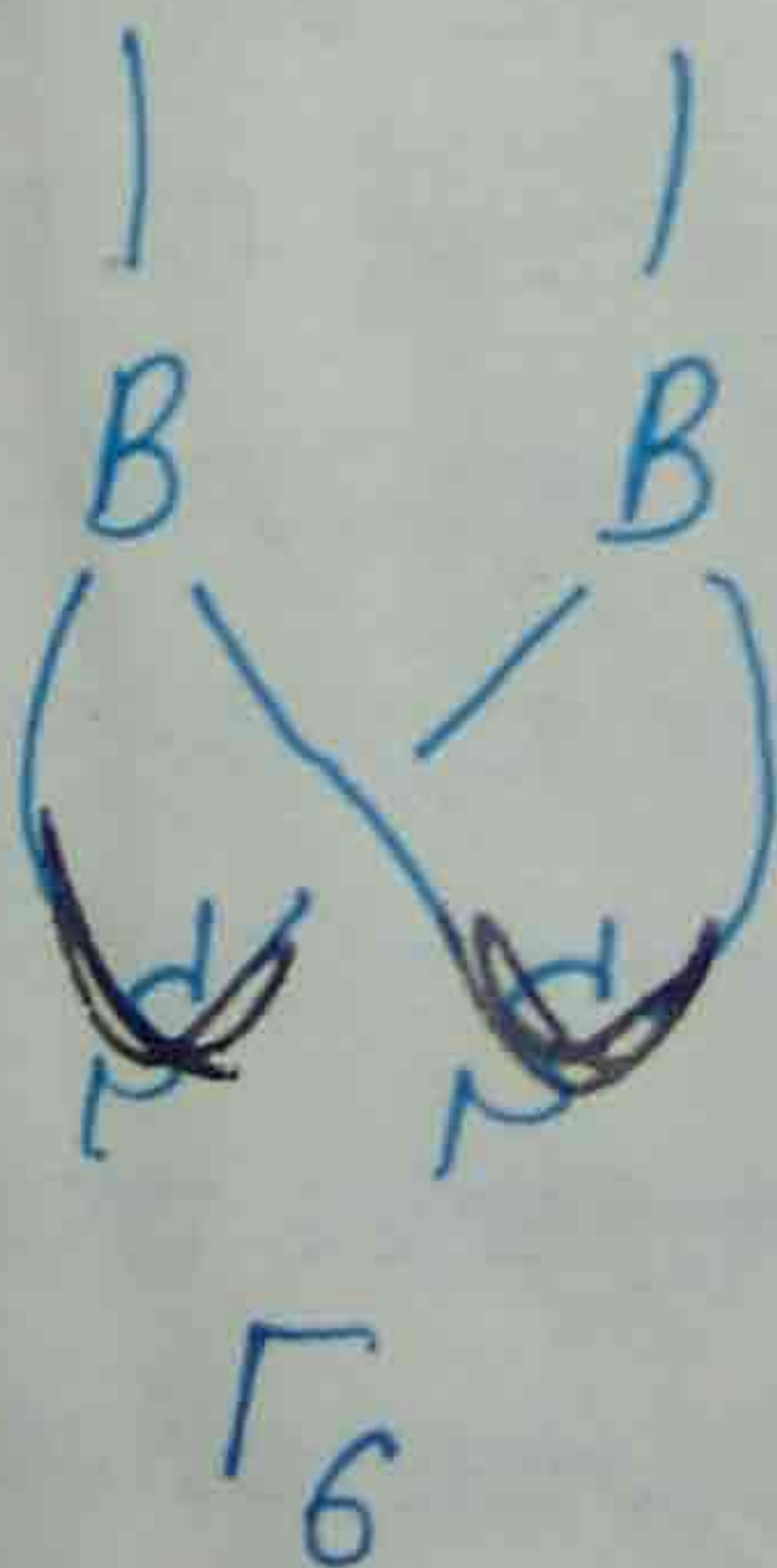
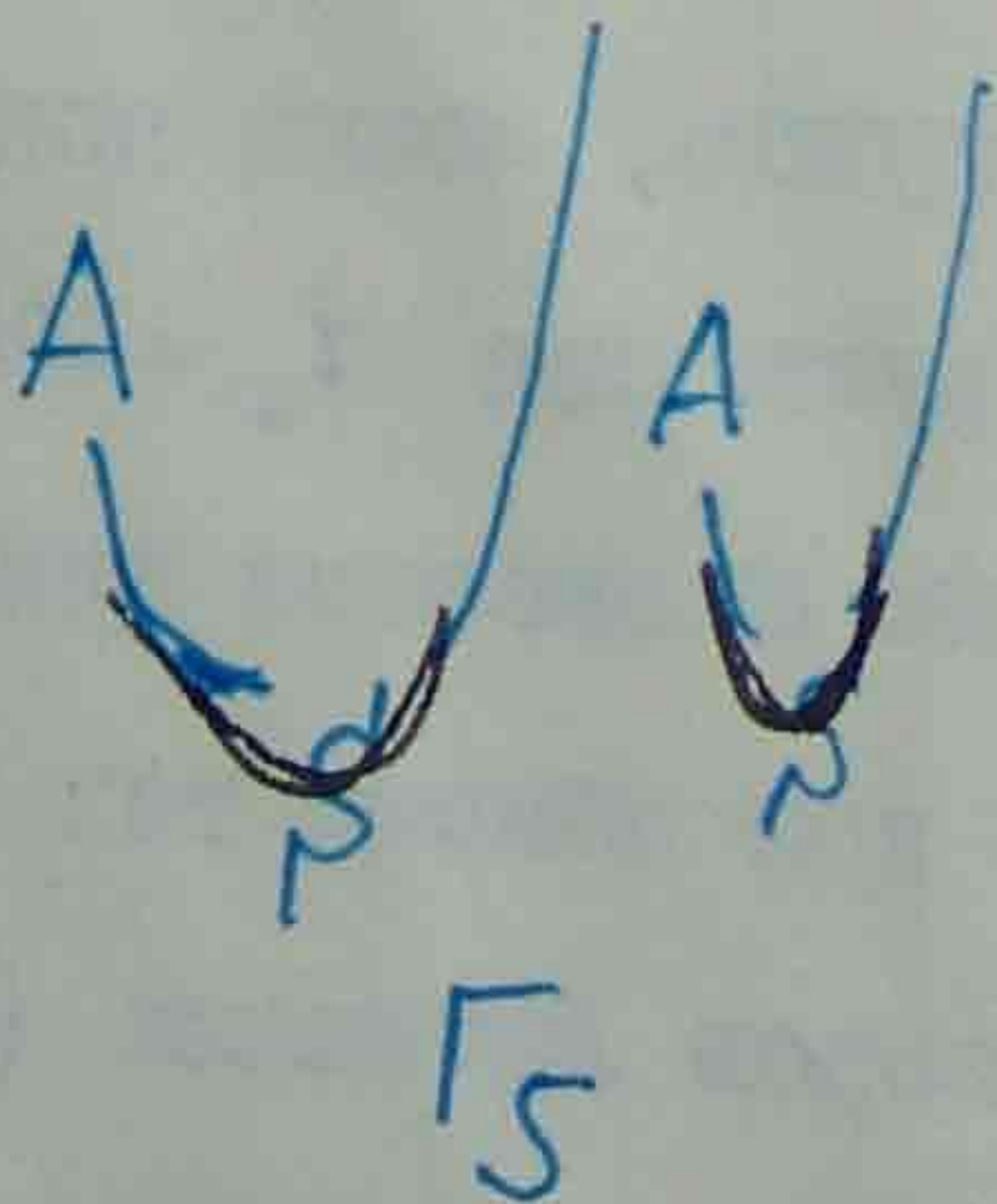
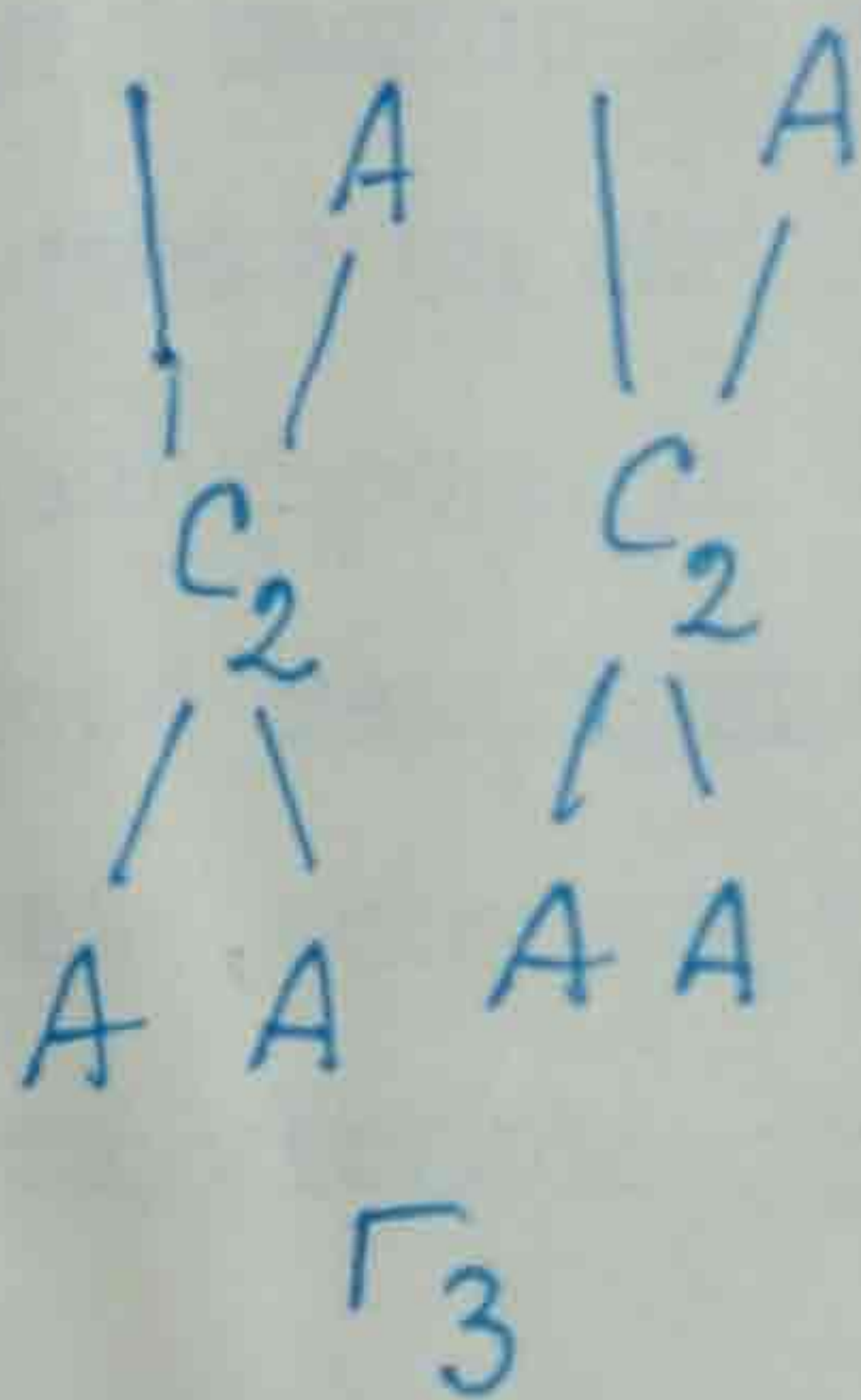
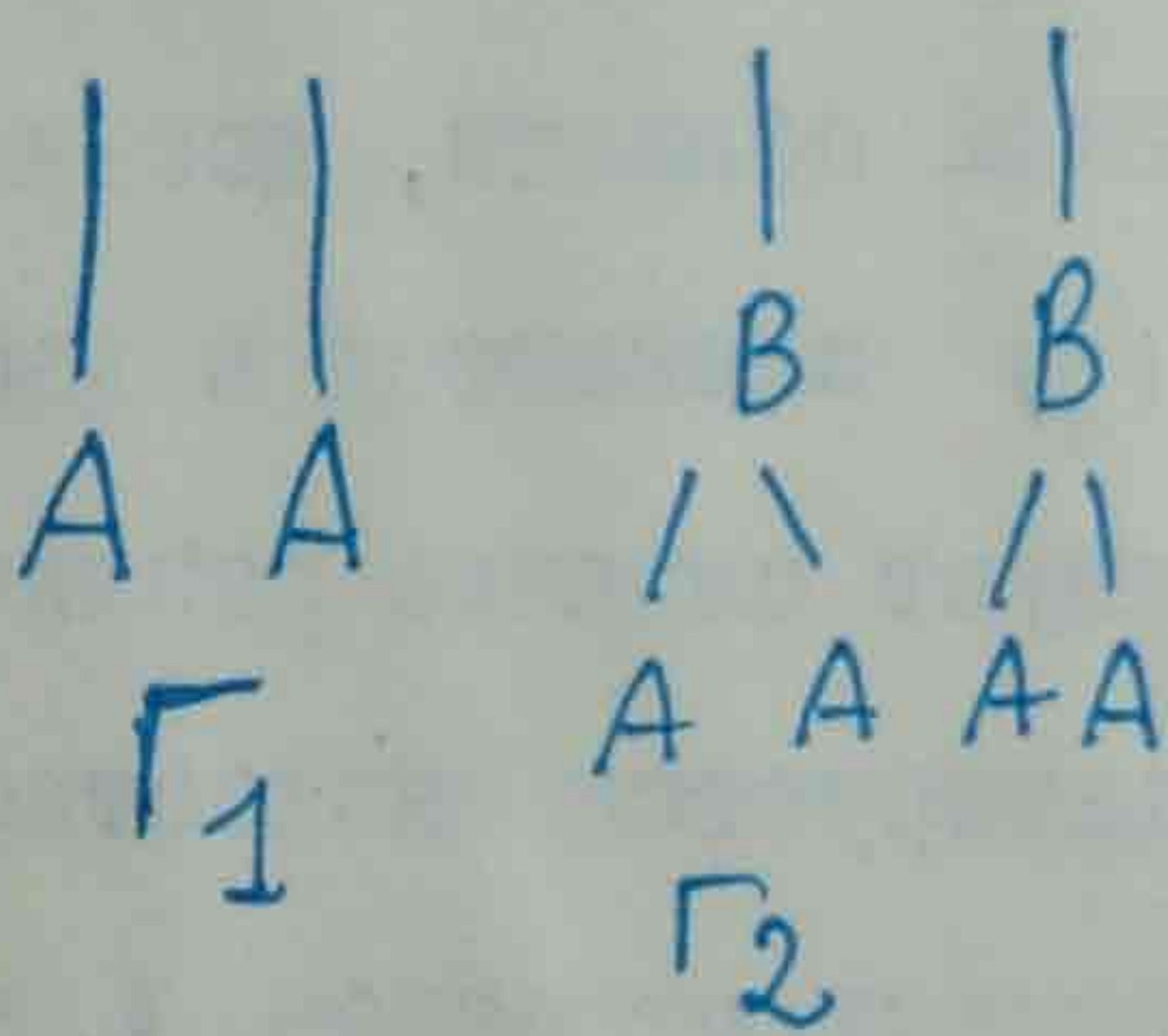


Рис. 28. Так как множество (7.14) некомпактно, а функция K_0 неограниченно возрастает на нем, то на концах некоторых ребер графа Γ , идущих вверх, отсутствуют жирные точки (обозначение максимума функции).

Мы исследовали систему (7.8) при условии, что выполнено (7.11) и $\mu = \alpha_1$. Совершенно аналогично разбираются случаи $\mu = \alpha_2$ и $\mu = \alpha_3$. В результате получаем еще два луча на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$. В этих случаях также можно определить, как перестраиваются окружности в прообразе точек, движущихся вдоль этих лучей. Результат для всех трех лучей приведен в таблице на Рис. 29. Интервалы изменения g указаны над таблицей.

Теперь можно описать бифуркационные диаграммы отображения (7.3). Из сказанного выше следует, что бифуркационная диаграмма при любом значении g есть объединение кривой (7.13) и трех лучей, лежащих на прямых $h = a_i k + 4a_i^3 + 4ga_i^2$ ($i=1,2,3$). Кривая имеет вид, изображенный на Рис. 30: (а) $g < -3a_3$; (б) $-3a_3 < g < -3a_2$; (с) $-3a_2 < g < -3a_1$; (д) $g > -3a_1$.

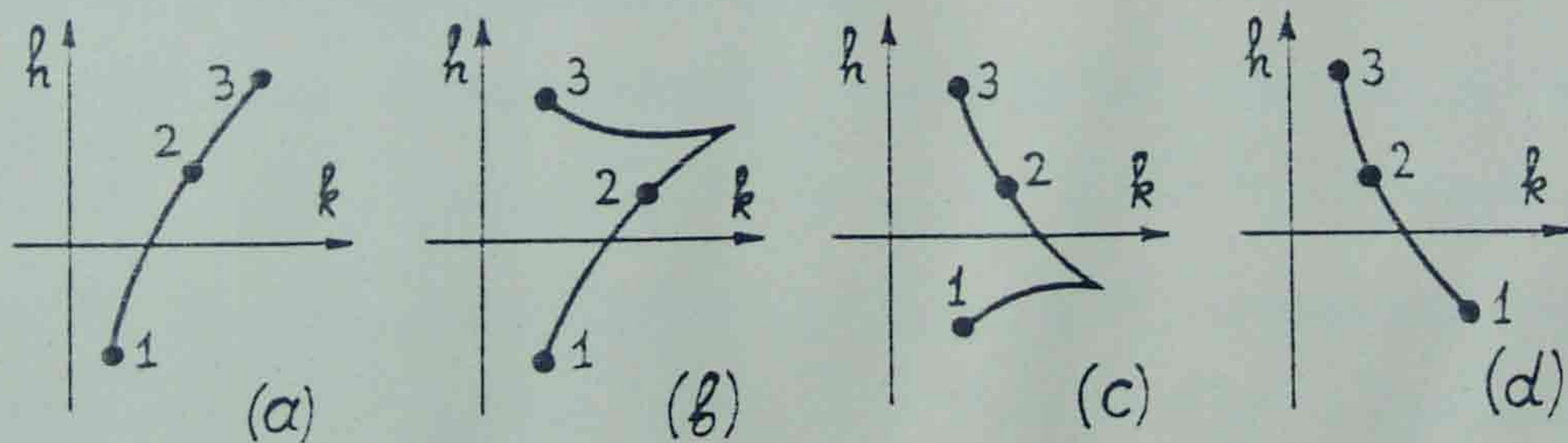


Рис. 30

Кривая (7.13) задана параметрически с параметром μ . Для точки кривой, отмеченной на Рис. 30 цифрой i ($i=1,2,3$), значение параметра μ равно $-\frac{g+\alpha_i}{2}$. Это точка пересечения кривой и прямой $h = a_i k + 4a_i^3 + 4ga_i^2$. Для точки возврата кривой $\mu = -\frac{g}{3}$ (при $-3a_3 < g < -3a_1$). Кроме того во всех точках кривой выполнено соотношение

$$\frac{dh}{d\mu} = \mu \frac{dk}{d\mu}, \quad (7.18)$$

где $h(\mu)$ и $k(\mu)$ — функции из (7.13) (см. Лемму 2 из §1). Отметим также, что пересечению кривой (7.13) с лучом (7.17) соответствуют "углы" (т.е. точки $R_1 = \pm 1$, $t_1 = \pm(g + 3\alpha_1)$) на Рис. 26 (стр. 72). Аналогичная ситуация для двух других лучей. Точки локальных экстремумов функции $t_1(R_1)$ и аналогичных функций $t_2(R_2)$ и $t_3(R_3)$ соответствуют пересечениям лучей на бифуркационной диаграмме. Касание луча и кривой происходит в случае, когда граф Γ , соответствующий этому лучу, есть Γ_4 , Γ_5 или Γ_6 (см. Рис. 28, 29 на стр. 74). В точке касания луча с кривой значение параметра μ на кривой равно α_i .

Объединяя все вышесказанное, получаем бифуркационные диаграммы, изображенные на Рис. 31. Случаи (a) — (j) на Рис. 31 соответствуют разбиению оси g на интервалы, указанные на Рис. 29 (стр. 74) под таблицей. Чтобы не усложнять рисунки, оси координат (k, h) не нарисованы. Перестройки торov Ливилля, указанные на Рис. 31, будут определены ниже.

Вычислим теперь индексы критических окружностей функции $\tilde{H}_0 = H_0|_{Q_k^3}$, где $Q_k^3 = \{t_1=1, t_2=g, \kappa_0=k\}$. Критические окружности, лежащие в прообразе кривой (7.13), определяются системой уравнений (7.12). При этом $k = -8\mu g - 12\mu^2$. Рассмотрим вектора

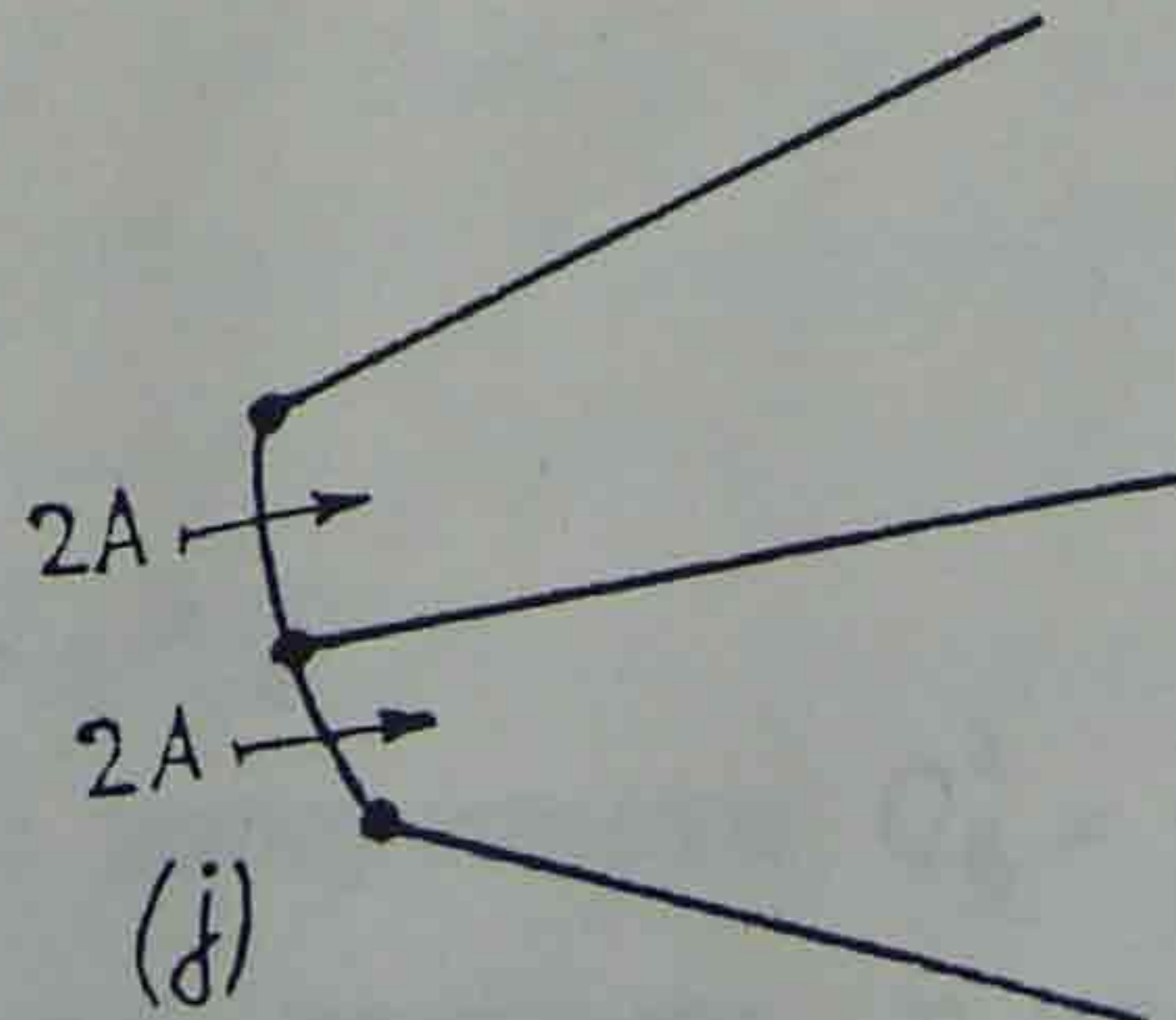
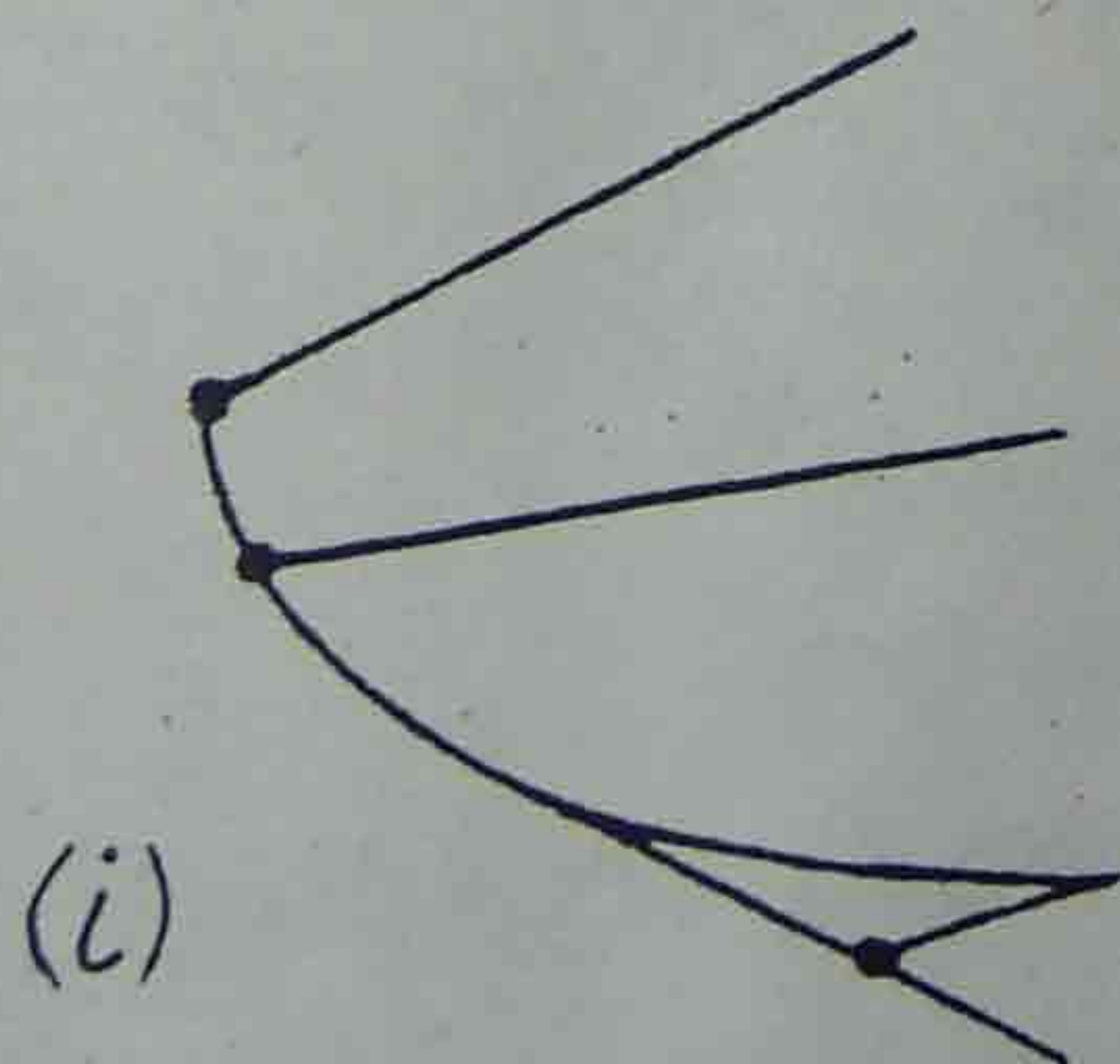
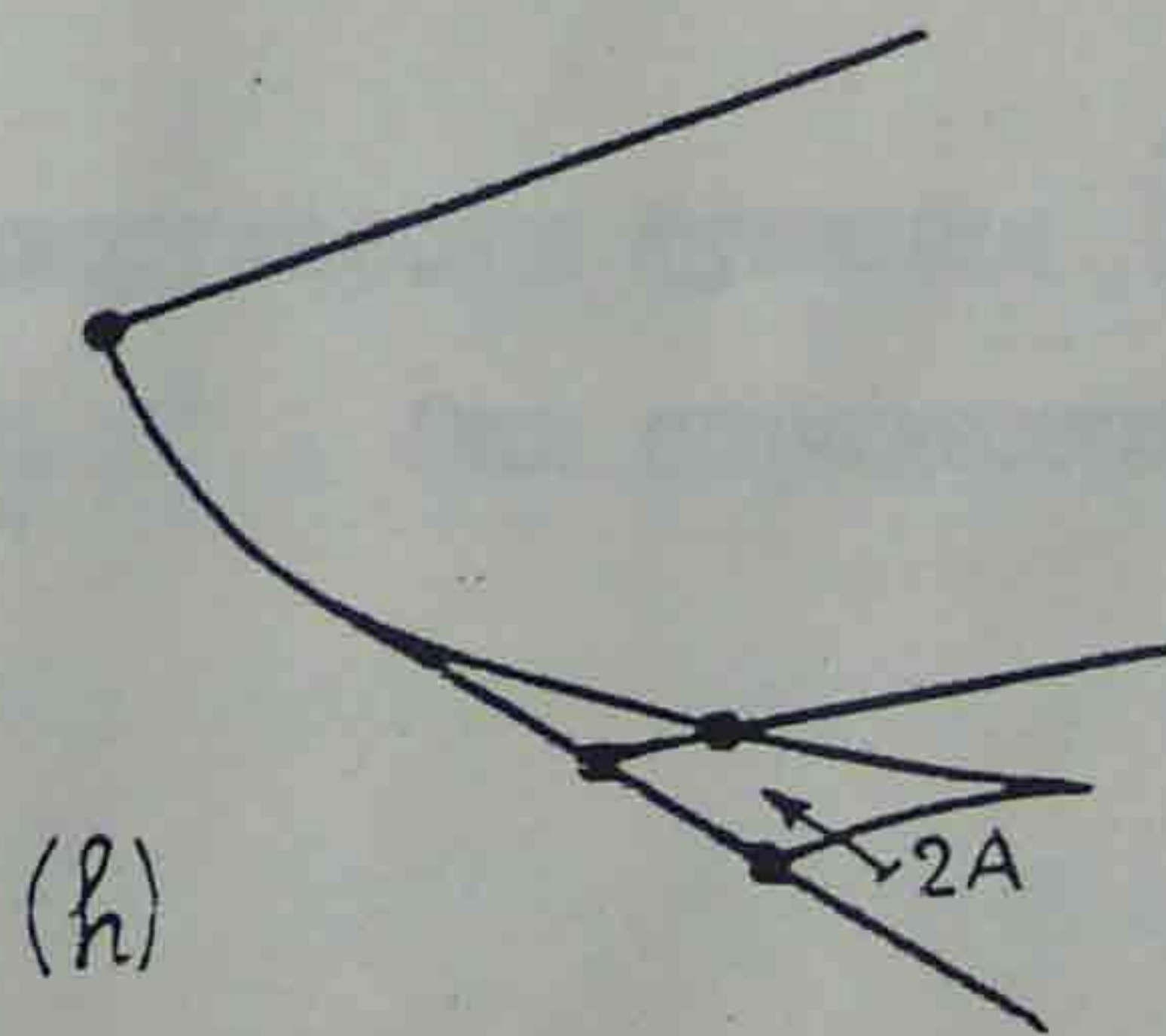
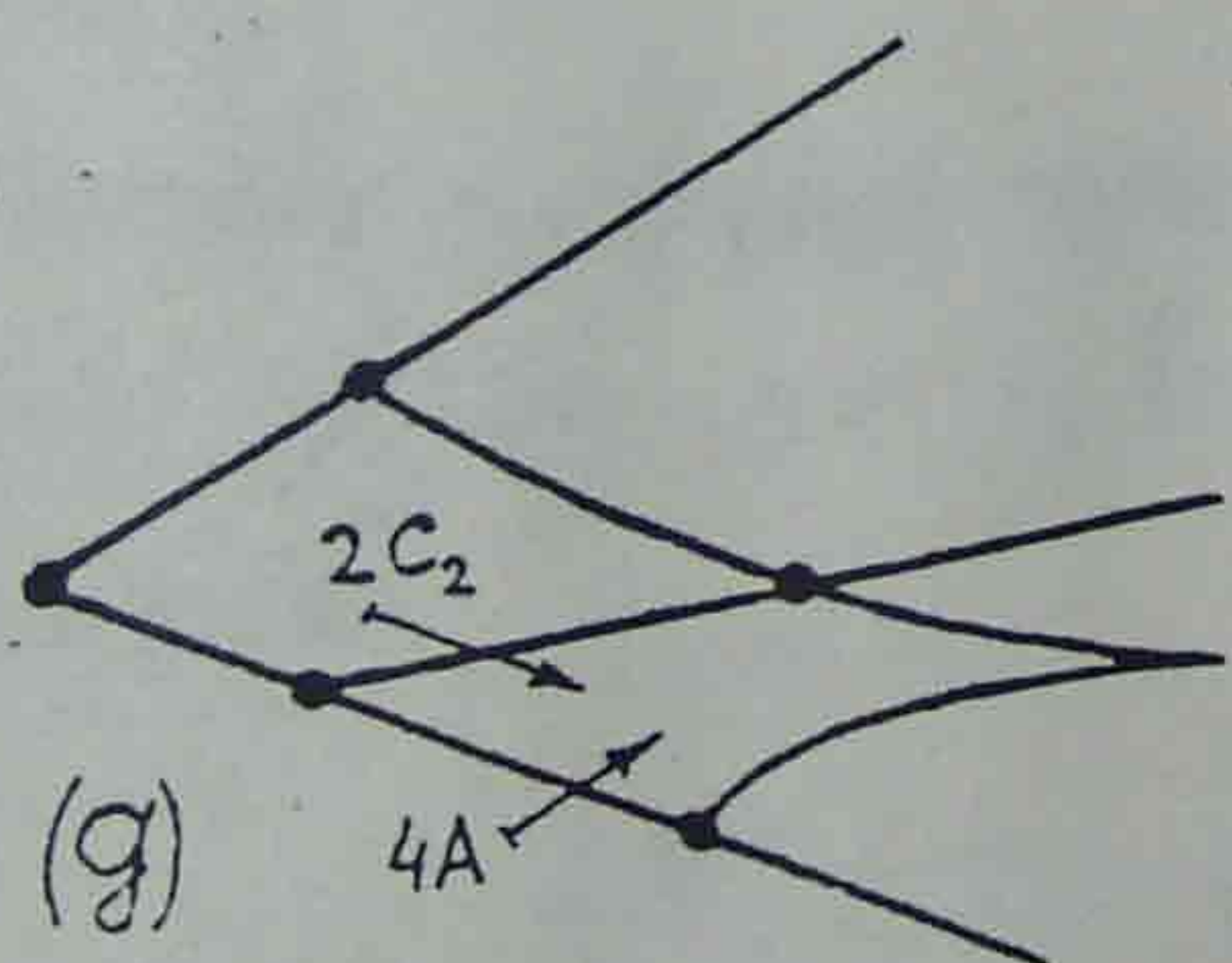
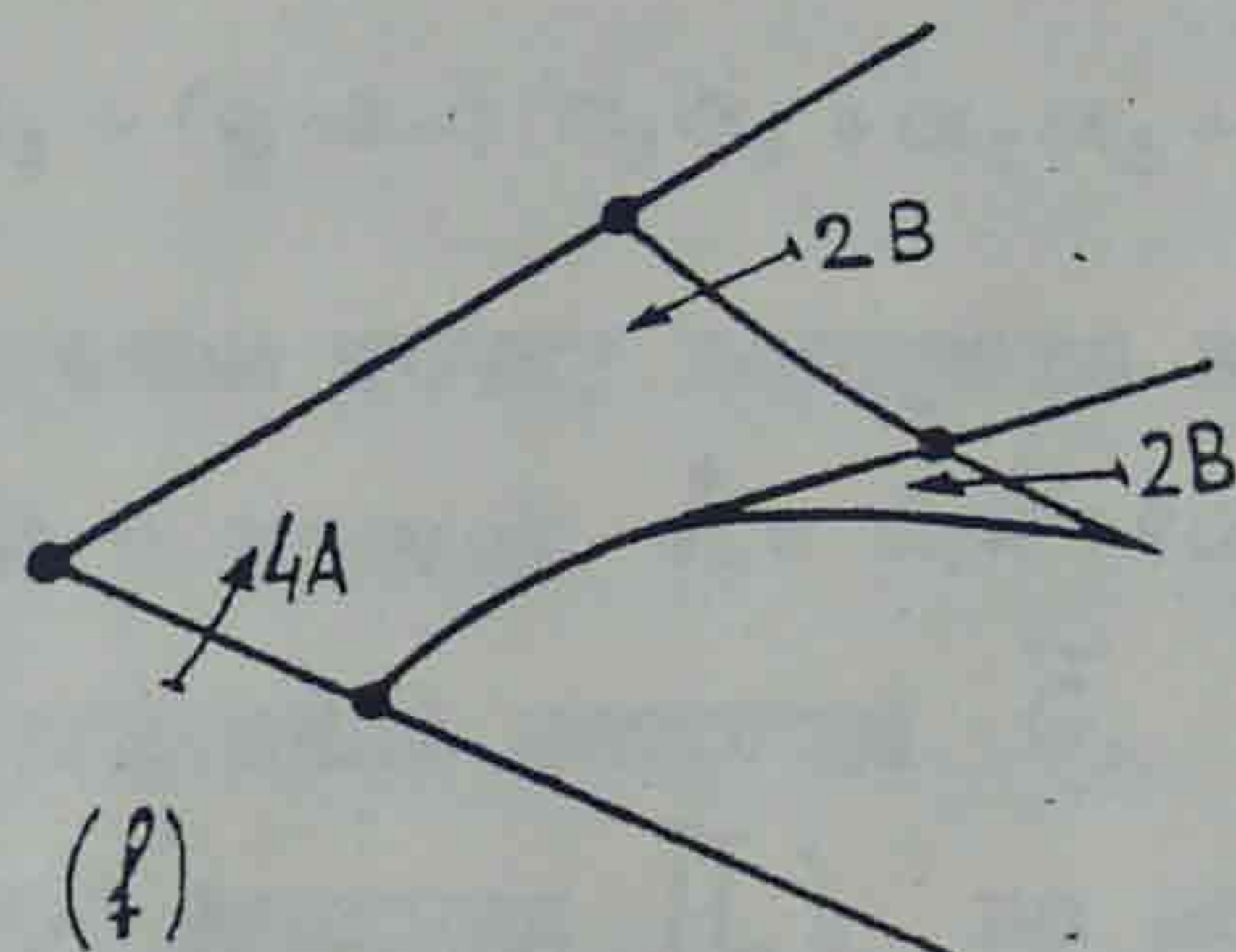
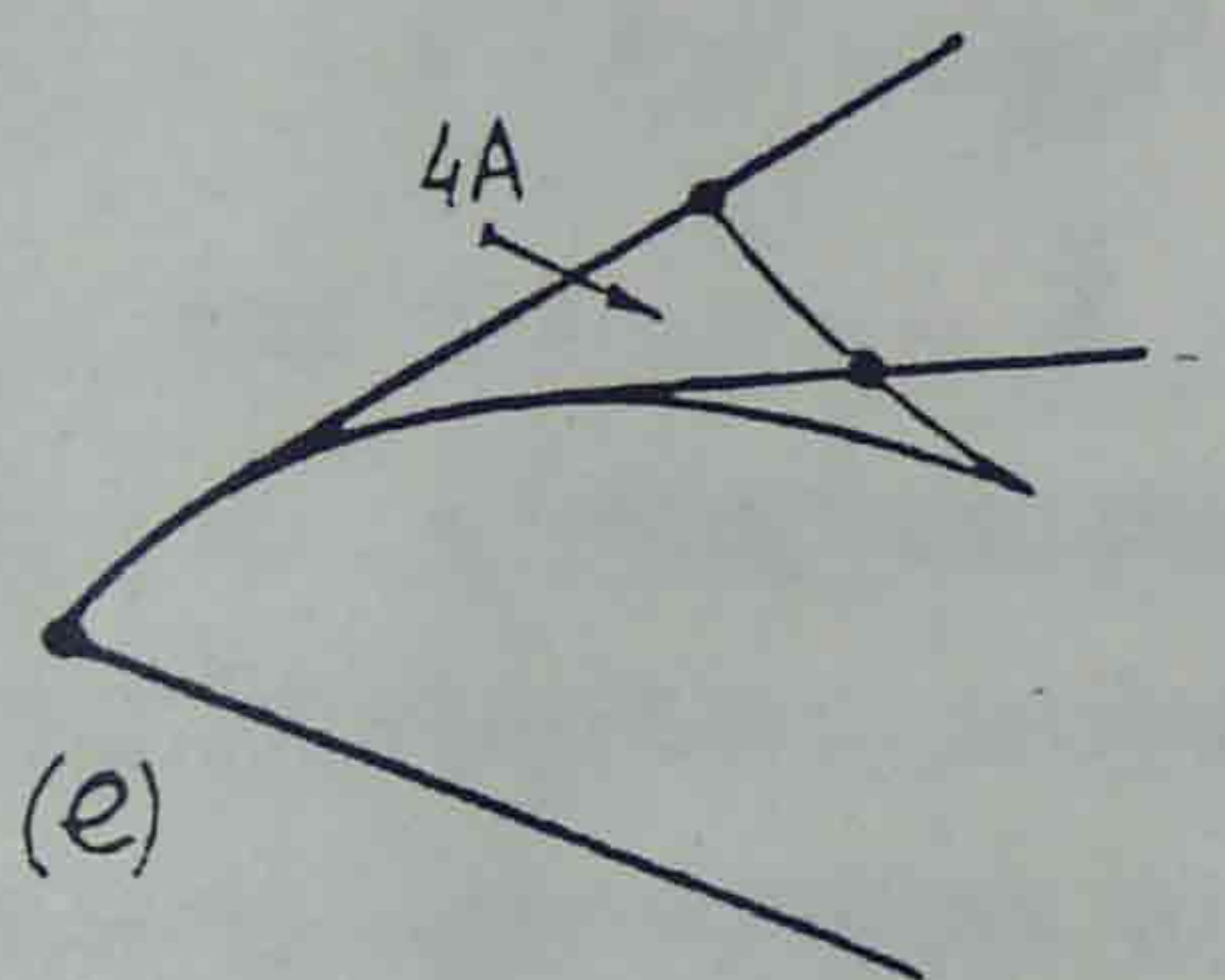
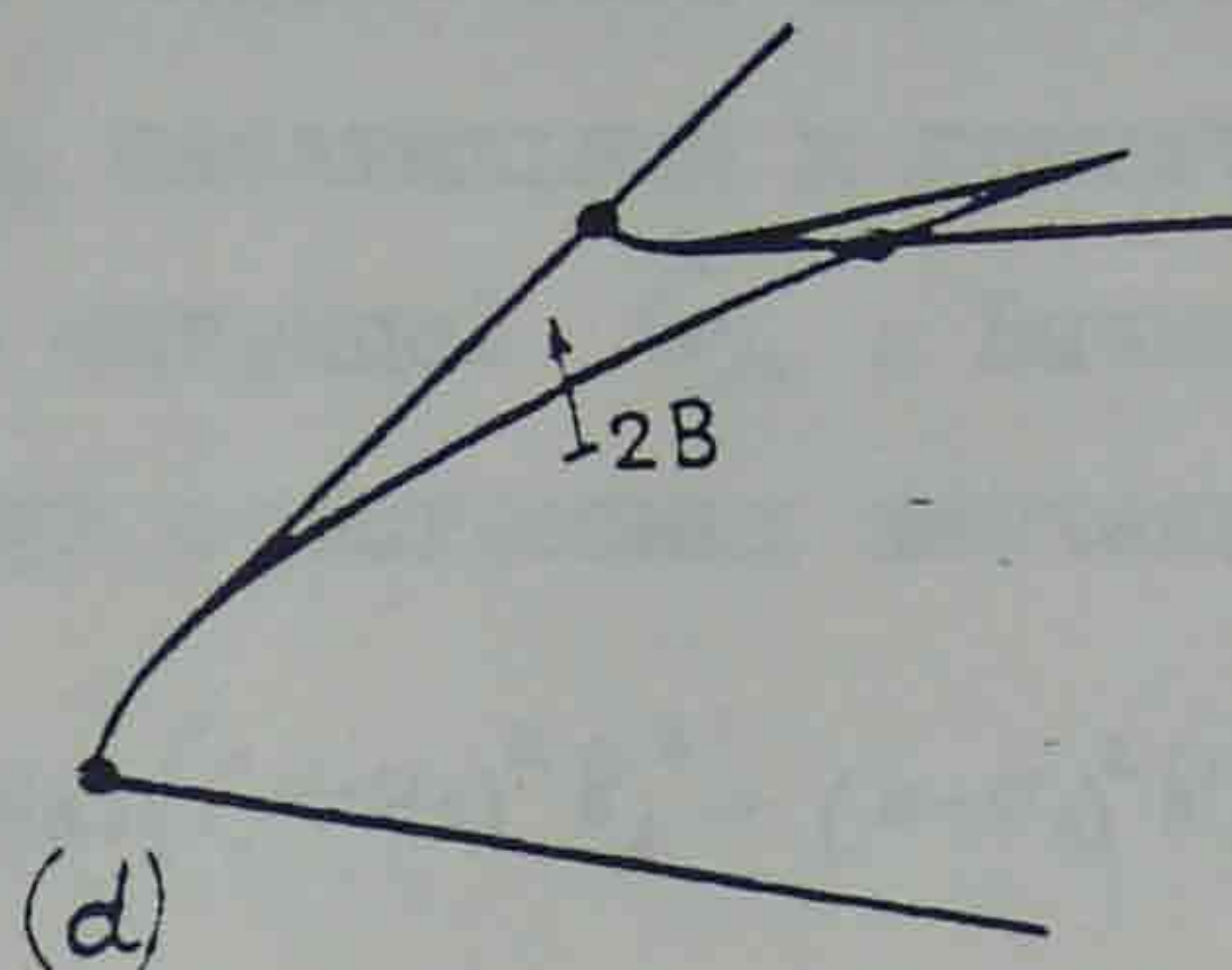
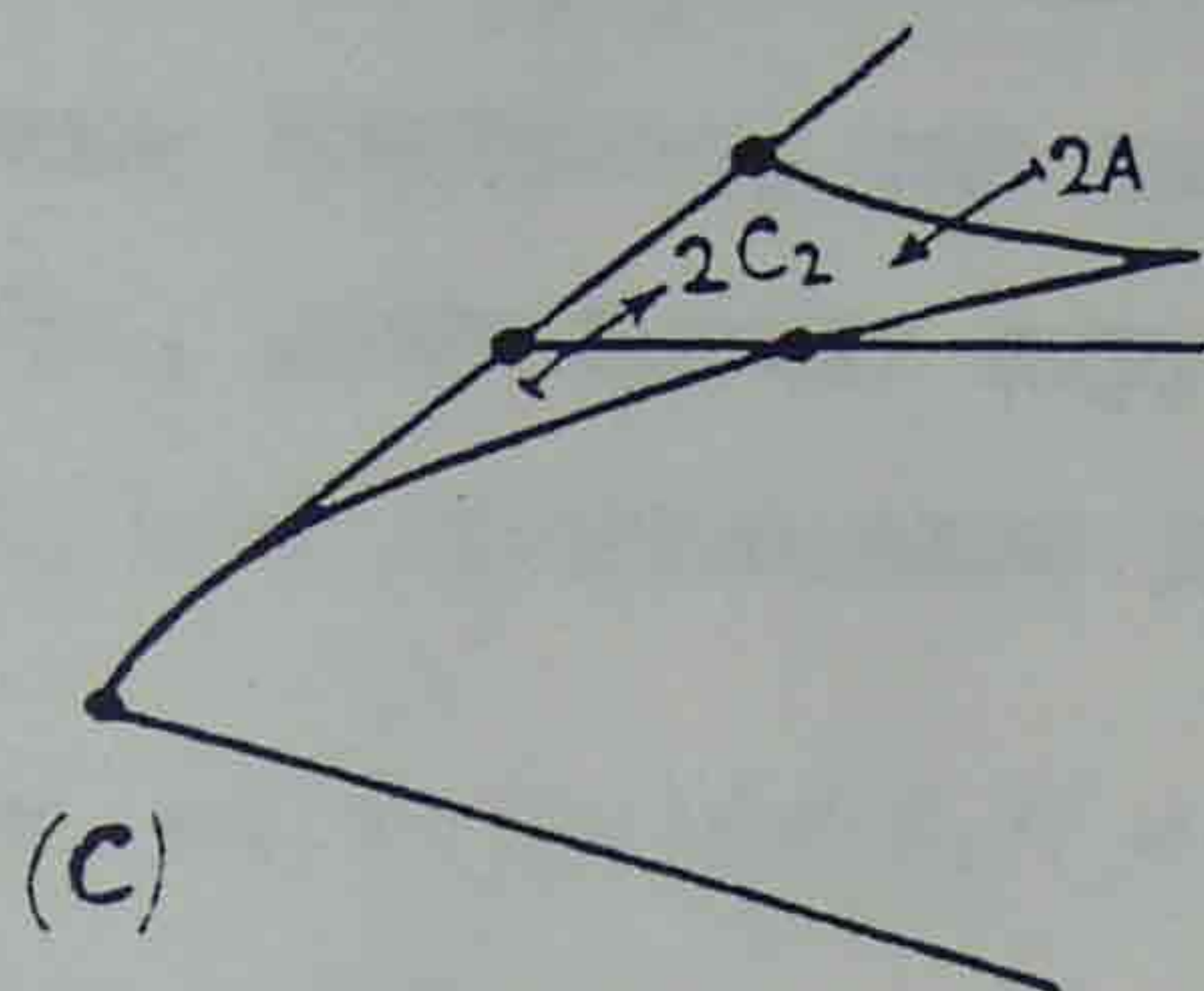
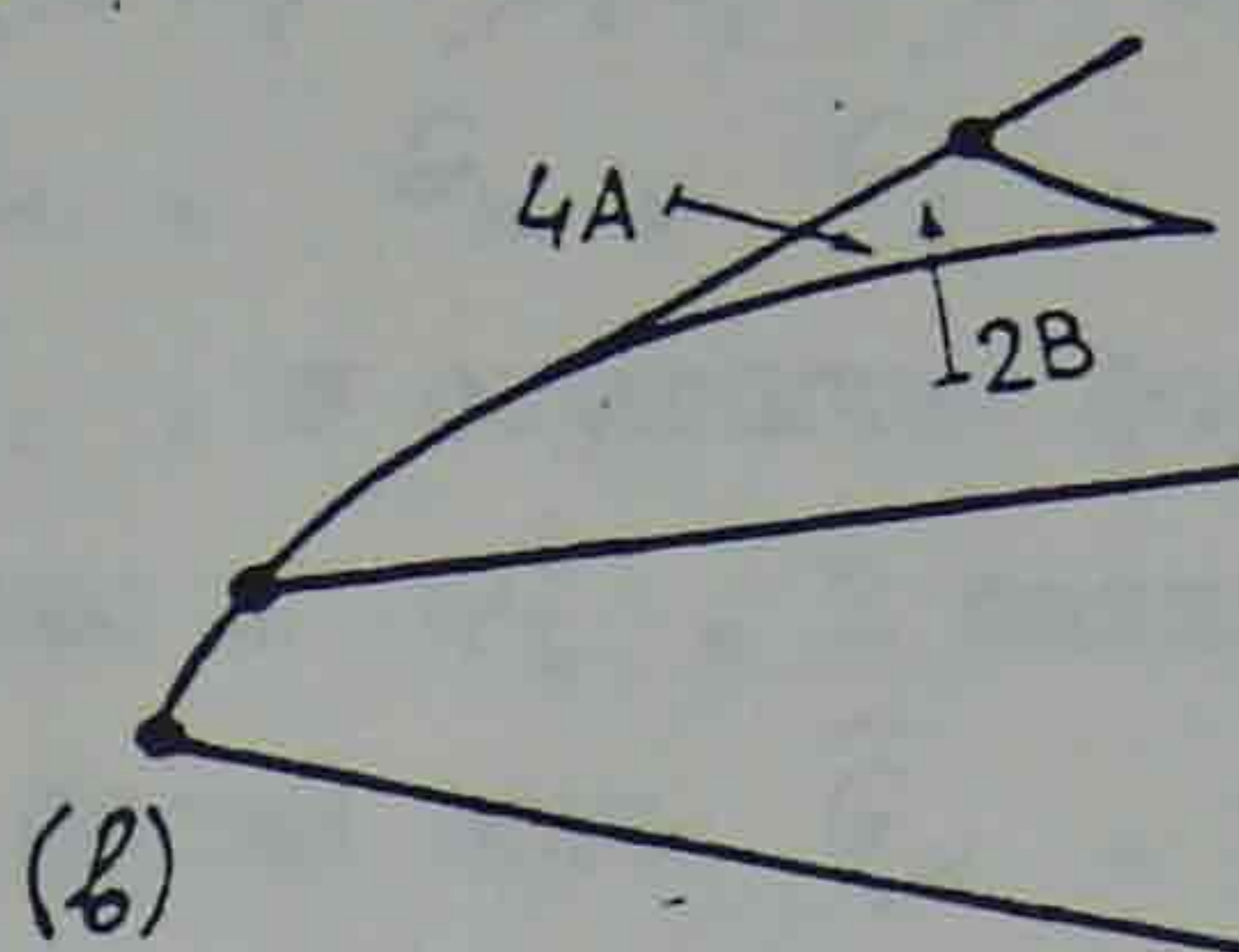
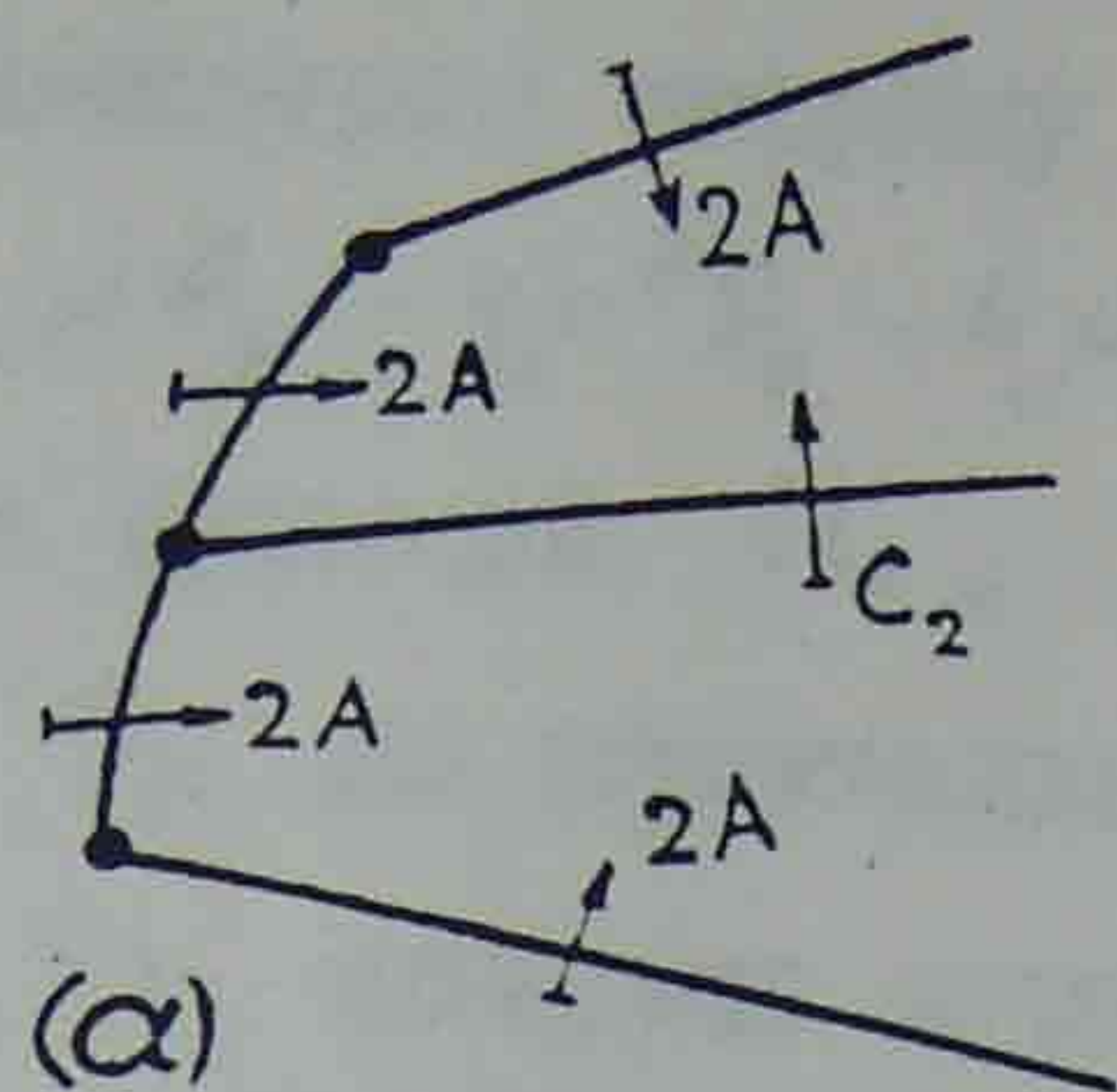
$$e_1 = (0, (\alpha_1 - \alpha_3)R_3, (\alpha_2 - \alpha_1)R_2, 0, R_3, -R_2),$$

$$e_2 = ((\alpha_3 - \alpha_2)R_3, 0, (\alpha_2 - \alpha_1)R_1, -R_3, 0, R_1),$$

$$e_3 = ((\alpha_3 - \alpha_2)R_2, (\alpha_1 - \alpha_3)R_1, 0, R_2, -R_1, 0)$$

в $\mathbb{R}^6(S, R)$. Легко проверяется, что эти вектора образуют базис касательного пространства к $Q_k^3 = \{t_1=1, t_2=g, \kappa_0 = -8\mu g - 12\mu^2\}$ во всех точках, определяемых системой (7.12), кроме точек (7.5),

Рис. 31



которые являются критическими для функции K_0 на TS^2 .

Рассмотрим матрицу $G_\mu = G_H - \mu G_K - \mu_1 G_1 - \mu_2 G_2 =$
 $= G_H - \mu G_K - 4\mu^3 G_1 - 4\mu^2 G_2$, где G_H , G_K , G_1 , G_2 —
 гессианы функций H_0 , K_0 , f_1 , f_2 , и ограничим форму с ма-
 трицей G_μ на касательное пространство к Q_k^3 . В базисе e_1 ,
 e_2 , e_3 матрица ограничения этой формы есть $\tilde{G}_\mu$, где
 $(\tilde{G}_\mu)_{ij} = G_\mu(e_i, e_j)$. У матрицы $\tilde{G}_\mu$ всегда есть одно нулевое
 собственное значение, так как вектор, касательный к критической
 окружности, принадлежит ядру формы с матрицей $\tilde{G}_\mu$. Вычисляя,
 получаем, что произведение других двух собственных значений равно

$$\Delta(\mu) = 16(g+3\mu)(\mu-a_1)(\mu-a_2)(\mu-a_3)((\mu-a_1)^2 R_1^2 + (\mu-a_2)^2 R_2^2 + (\mu-a_3)^2 R_3^2),$$

а их сумма равна

$$\text{tr } \tilde{G}_\mu = -4(8\mu^3 + 3g\mu^2 + a_1 a_2 a_3 + (g+2\mu)(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)).$$

Учитывая, что при $\mu = -\frac{g}{3}$ мы получаем точку возврата кривой,
 а при $\mu = a_i$ — точку касания кривой с прямой $h = a_i k + 4a_i^3 + 4ga_i^2$,
 легко определить знаки собственных значений матрицы $\tilde{G}_\mu$ (а зна-
 чит и индексы критических окружностей функции $\tilde{H}_0$) во всех точ-
 ках кривой.

Рассмотрим теперь критические окружности функции $\tilde{H}_0$ в
 прообразе прямой $h = a_1 k + 4a_1^3 + 4ga_1^2$. Они определяются систе-
 мой уравнений

$$\begin{cases} S_1 = t_1 - 3a_1 R_1 \\ S_2 = (a_3 - a_1) R_2 \\ S_3 = (a_2 - a_1) R_3 \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g \end{cases}.$$

Базис в касательном пространстве к поверхности $Q_k^3 = \{f_1=1, f_2=g,$

$K_0 = t_1^2 - 12a_1^2 - 8ga_1\}$ можно выбрать, например, в виде:

$$e_1 = (0, (\alpha_1 - \alpha_3)R_3, (\alpha_2 - \alpha_1)R_2, 0, R_3, -R_2),$$

$$e_2 = ((\alpha_3 - \alpha_2)R_3, 0, (\alpha_2 - \alpha_1)R_1 + t_1, -R_3, 0, R_1),$$

$$e_3 = ((\alpha_3 - \alpha_2)R_2, (\alpha_1 - \alpha_3)R_1 - t_1, 0, R_2, -R_1, 0).$$

Ограничивая форму с матрицей $G_{\alpha_1}(t_1) = G_H - \alpha_1 G_K - 4\alpha_1^3 G_1 - 4\alpha_1^2 G_2$ на касательное пространство к Q_k^3 , получаем матрицу $\tilde{G}_{\alpha_1}(t_1)$. Вычисляя, получаем, что произведение двух ненулевых собственных значений матрицы $\tilde{G}_{\alpha_1}(t_1)$ равно

$$\Delta(t_1) = t_1^2 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) (t_1^2 + 4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 R_2^2 + 4(\alpha_3 - \alpha_1)^2 R_3^2),$$

а их сумма равна

$$\text{tr } \tilde{G}_{\alpha_1}(t_1) = 4(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) ((\alpha_2 - \alpha_1)R_2^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)R_3^2) - 3\alpha_1 t_1^2.$$

Из выражений для $\Delta(t_1)$ и $\tilde{G}_{\alpha_1}(t_1)$ следует, что в данном случае собственные значения всегда положительны, за исключением случая, когда $t_1 = 0$ (в этом случае одно собственное значение равно нулю, а другое положительно). Проводя аналогичные вычисления для двух других лучей, в итоге получаем, что индекс критической окружности функции $\tilde{H}_0$, лежащей в прообразе прямой $h = \alpha_i k + 4\alpha_i^3 + 4g\alpha_i^2$, равен $(i-1)$.

Итак, мы определили индексы всех критических окружностей отображения $H_0 \times K_0$. Кроме того, мы доказали, что все критические окружности невырождены, кроме тех, которые лежат в прообразе точки возврата кривой или точек касания кривой с лучами. Зная индексы, можно определить перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения (7.3). Очевидно, что тем частям бифуркационных диаграмм, для которых индекс критической окружности равен 0 или 2, соответствуют перестройки, кодируемые буквой-атомом A . Отсюда легко установить число торов Лиувилля в прообразе каждой точки, не лежащей на бифуркационной диаграмме. Осталось определить вид перестроек по седловым критическим окруж-

ностям.

Разберем, например, Рис. 31 (q). Более подробно эта бифуркационная диаграмма изображена на Рис. 32.

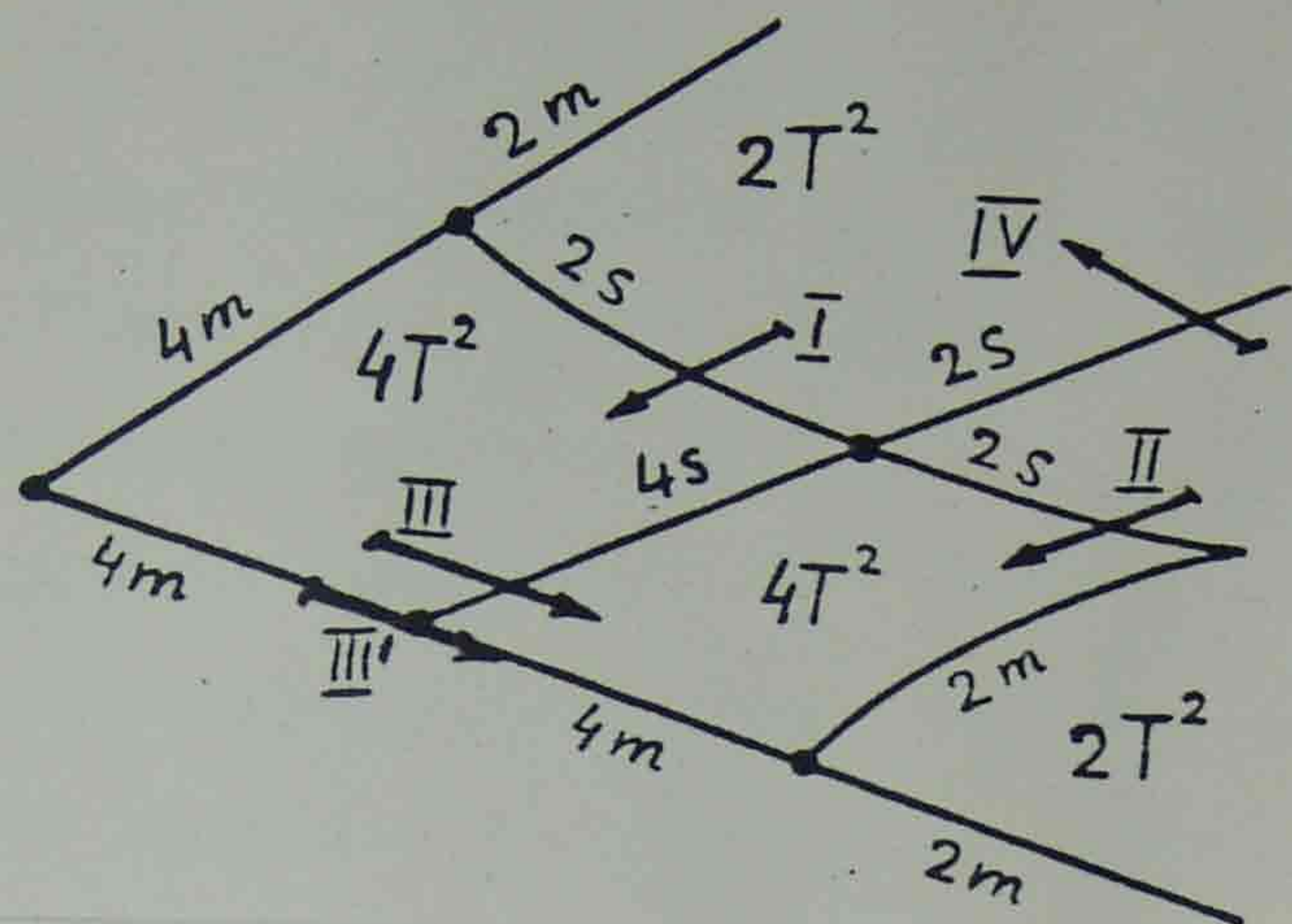


Рис. 32

Цифрами на Рис. 32 обозначено число торов Лиувилля, число седловых окружностей (например, $4s$) и число минимаксных окружностей (например, $2m$). Перестройки вдоль стрелок I и II — это перестройки двух торов Лиувилля в четыре тора по двум седловым окружностям. Существует всего одна перестройка с такими свойствами (см. список в [13]). Эта перестройка кодируется двумя буквами-атомами В. Далее, перестройка торов вдоль стрелки III имеет тот же вид, что и перестройка критических окружностей в прообразе точки, движущейся вдоль стрелки III'. Это следует из общих результатов А.В.Болсинова [38]. Поскольку лучу, вдоль которого направлена стрелка III', соответствует граф Γ_3 (см. Рис. 28 и Рис. 29 на стр. 74), то перестройка торов Лиувилля вдоль стрелки III кодируется двумя буквами-атомами C_2 . Осталось определить вид перестройки вдоль стрелки IV. При изменении значения q бифуркационная диаграмма непрерывно деформируется и для достаточно больших значений q имеет вид, изображенный на Рис. 31 (j) (стр. 77). При этом лучи переходят в соответствующие лучи. Поэтому перестройка торов вдоль стрелки IV

имеет тот же вид, что и перестройка торов при пересечении среднего луча на Рис. 3I (j). Она кодируется буквой-атомом C_2 , что можно установить тем же способом, что и для перестройки вдоль стрелки III. Разбирая аналогичным образом все случаи (a) - (j) на Рис. 3I, можно определить все перестройки торов Лиувилля. Ответ приведен на Рис. 3I.

Т е о р е м а 7. Пусть гамильтониан H случая Стеклова (I.19) представлен в виде (7.2). Тогда бифуркационные диаграммы отображения момента $H \times K : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ получаются из бифуркационных диаграмм, изображенных на Рис. 3I (стр. 77), при невырожденном линейном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$. Дополнительный интеграл случая Стеклова боттовский на всех неособых изоэнергетических поверхностях $Q_c = \{f_1 = 1, f_2 = g, H = c\}$, кроме тех, для которых прямая $\alpha h + \beta k = c - \gamma - \delta g$ на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ проходит через точку касания луча с кривой или через точку возврата кривой (для диаграмм на Рис. 3I).

Перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента указаны на Рис. 3I. Список всех возможных для случая Стеклова инвариантов Фоменко при различных значениях α, β, g, h состоит из 6 слов-молекул типа I, 2, 5, I2, I3, I7 из Таблицы I (см. Приложение).

§ 8. Четырехмерное твердое тело.

Как показано в §I, различные обобщения классической задачи о движении твердого тела описываются уравнениями Эйлера для алгебры Ли $e(3)$. Аналогичные уравнения можно рассматривать и для других алгебр Ли. В этом параграфе будет исследован один интегрируемый случай уравнений Эйлера для алгебры Ли $so(4)$.

Алгебра Ли $so(4)$ реализуется в виде кососимметрических матриц X с обычным коммутатором:

$$[X, Y] = XY - YX \quad (8.1)$$

Пусть матрица X имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 & p_1 \\ M_3 & 0 & -M_1 & p_2 \\ -M_2 & M_1 & 0 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда скобка Ли-Пуассона на $so(4)^*$, соответствующая коммутатору (8.1), имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k. \quad (8.2)$$

Гамильтонова система для алгебры Ли $so(4)$ записывается в виде уравнений Эйлера

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (8.3)$$

где функция $H(M, p)$ — гамильтониан.

Скобка (8.2) в $\mathbb{R}^6(M, p)$ вырождена. Инварианты алгебры Ли $so(4)$

$$f_1 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad f_2 = M_1 p_1 + M_2 p_2 + M_3 p_3 \quad (8.4)$$

коммутируют со всеми функциями $f(M, p)$. Совместные поверхности уровня функций f_1 и f_2 — это орбиты коприсоединенного представ-

вления группы Ли $SO(4)$

$$O(d_1, d_2) = \{f_1 = d_1, f_2 = d_2\} \subset \mathbb{R}^6(M, p). \quad (8.5)$$

Ограничение скобки (8.2) на эти орбиты невырождено, т.е. задает на орбитах симплектическую структуру. Орбиты будут неособыми при $d_1 > 2|d_2|$. Они гомеоморфны $S^2 \times S^2$. При $d_1 = 2|d_2|$ получаются сингулярные орбиты, гомеоморфные S^2 . Если $d_1 < 2|d_2|$, то $O(d_1, d_2) = \emptyset$. Система (8.3) определяет на орбитах общего положения гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Ее полная интегрируемость по Лиувиллю равносильна существованию одного дополнительного интеграла K , функционально независимого с гамильтонианом H на орбитах.

Рассмотрим гамильтониан вида

$$H = \alpha_1 M_1^2 + \alpha_2 M_2^2 + \alpha_3 M_3^2 + c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_3^2. \quad (8.6)$$

В работе [35] показано, что для гамильтониана (8.6) дополнительный квадратичный интеграл существует только в случае, когда параметры гамильтониана удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \alpha_1 c_1 (\alpha_2 + c_2 - \alpha_3 - c_3) + \alpha_2 c_2 (\alpha_3 + c_3 - \alpha_1 - c_1) + \\ + \alpha_3 c_3 (\alpha_1 + c_1 - \alpha_2 - c_2) = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Гамильтониан (8.6) при выполнении условия (8.7) есть гамильтониан нормальной серии для $so(4)$ (см. [31]). Систему уравнений (8.3) с гамильтонианом (8.6), (8.7) иногда называют уравнениями движения четырехмерного твердого тела (это аналог обычного случая Эйлера).

Рассмотрим соотношение (8.7). Легко показать, что оно равносильно выполнению одного из следующих двух условий:

$$\alpha_1 + c_1 = \alpha_2 + c_2 = \alpha_3 + c_3 \quad (8.8)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 c_1 = q + z(\alpha_1 + c_1) \\ \alpha_2 c_2 = q + z(\alpha_2 + c_2) \\ \alpha_3 c_3 = q + z(\alpha_3 + c_3) \end{cases}, \quad (8.9)$$

где q, z — некоторые константы. Если выполнено первое условие (8.8), то гамильтониан (8.6) примет вид:

$$H_0 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2 - b_1 p_1^2 - b_2 p_2^2 - b_3 p_3^2. \quad (8.10)$$

Второе условие (8.9) можно переписать в виде

$$\begin{cases} (z - \alpha_1)(z - c_1) = z^2 + q \\ (z - \alpha_2)(z - c_2) = z^2 + q \\ (z - \alpha_3)(z - c_3) = z^2 + q \end{cases}. \quad (8.11)$$

Если $z^2 + q = 0$, то по крайней мере три из коэффициентов α_i, c_i ($i=1, 2, 3$) равны нулю. Тогда линейной заменой координат в $\mathbb{R}^6(M, p)$, сохраняющей скобку (8.2), гамильтониан (8.6) приводится к одному из следующих:

$$H_1 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2; \quad (8.12)$$

$$H_2 = b_1 p_1^2 + b_2 p_2^2 + b_3 p_3^2. \quad (8.13)$$

Пусть $z^2 + q \neq 0$. Тогда из (8.11) легко следует, что гамильтониан (8.6) можно записать в виде

$$H = A \cdot H_3 + z \cdot f_1, \quad (8.14)$$

где

$$H_3 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2 + b_2 b_3 p_1^2 + b_3 b_1 p_2^2 + b_1 b_2 p_3^2, \quad (8.15)$$

$$b_1 = \frac{(c_2 - z)(c_3 - z)}{z^2 + q}, \quad b_2 = \frac{(c_3 - z)(c_1 - z)}{z^2 + q}, \quad b_3 = \frac{(c_1 - z)(c_2 - z)}{z^2 + q},$$

$$A = \frac{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)(\alpha_3 - z)}{z^2 + q}.$$

Поскольку прибавление инварианта f_1 к гамильтониану не изменяет систему (8.3), мы получаем, что любой гамильтониан вида (8.6), (8.7) эквивалентен одному из гамильтонианов H_0, H_1, H_2, H_3 , каждый из которых зависит лишь от трех параметров b_1, b_2, b_3 .

Рассмотрим гамильтониан H_1 . Интеграл для него имеет вид $K_1 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$. Очевидно, что гамильтонова система (8.3) с гамильтонианом H_1 (8.12) определяет в точности тот же фазовый поток в $\mathbb{R}^6$, что и в обычном случае Эйлера (замена $S=M, R=p$). Бифуркационная диаграмма отображения $K_1 \times H_1: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(k_1, h_1)$ изображена на Рис. 33. Она состоит из 5 отрезков, лежащих на прямых $h_1 = b_i k_1$ ($i=1, 2, 3$), $2k_1 = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_2^2}$, где d_1, d_2 определяют орбиту (8.5). Бифуркационная диаграмма отображения $f_2 \times H_1: S^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(d_2, h_1)$, где $S^5 = \{f_1 = d_1\} \subset \mathbb{R}^6(M, p)$, изображена на Рис. 34.

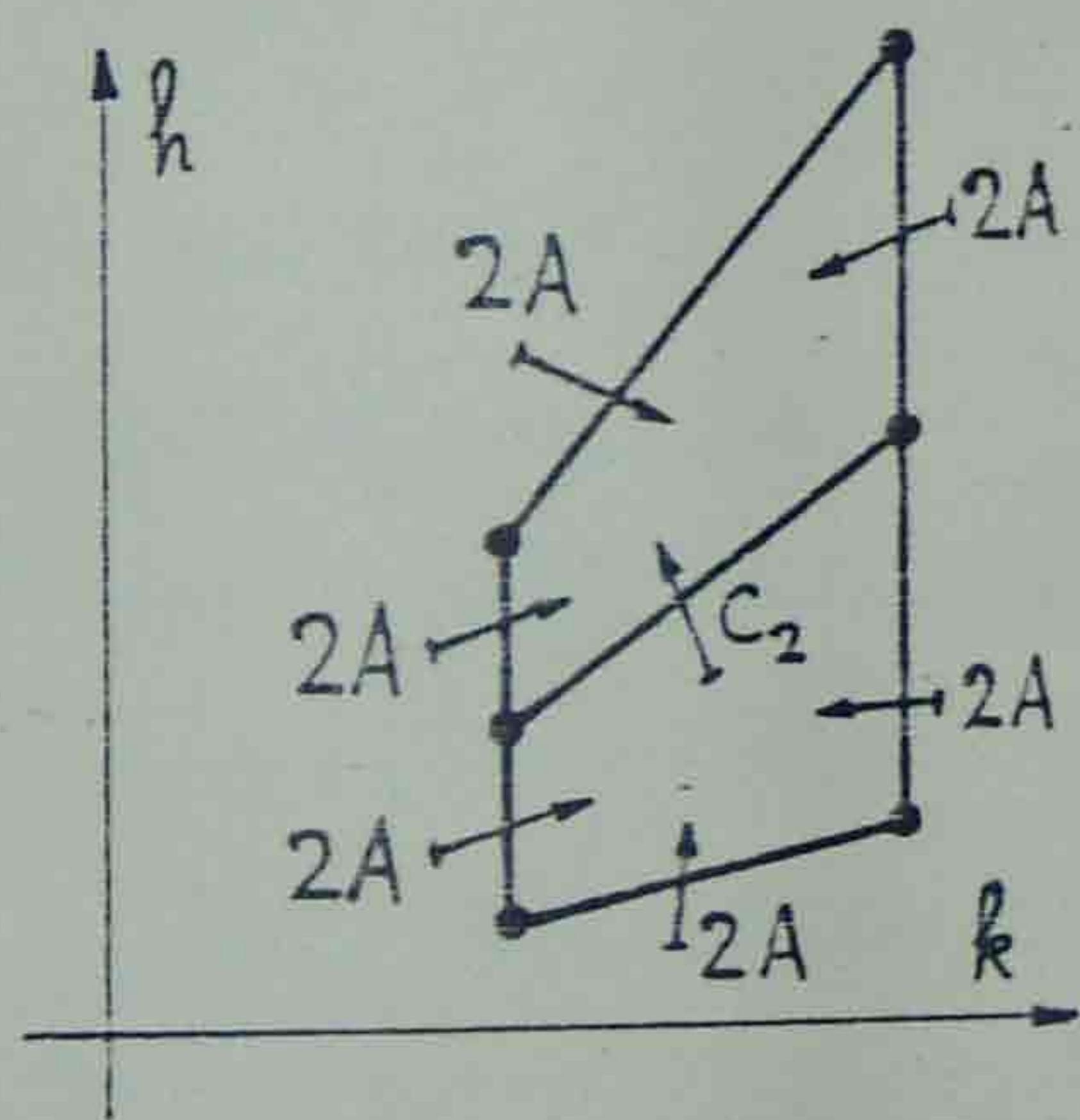


Рис. 33

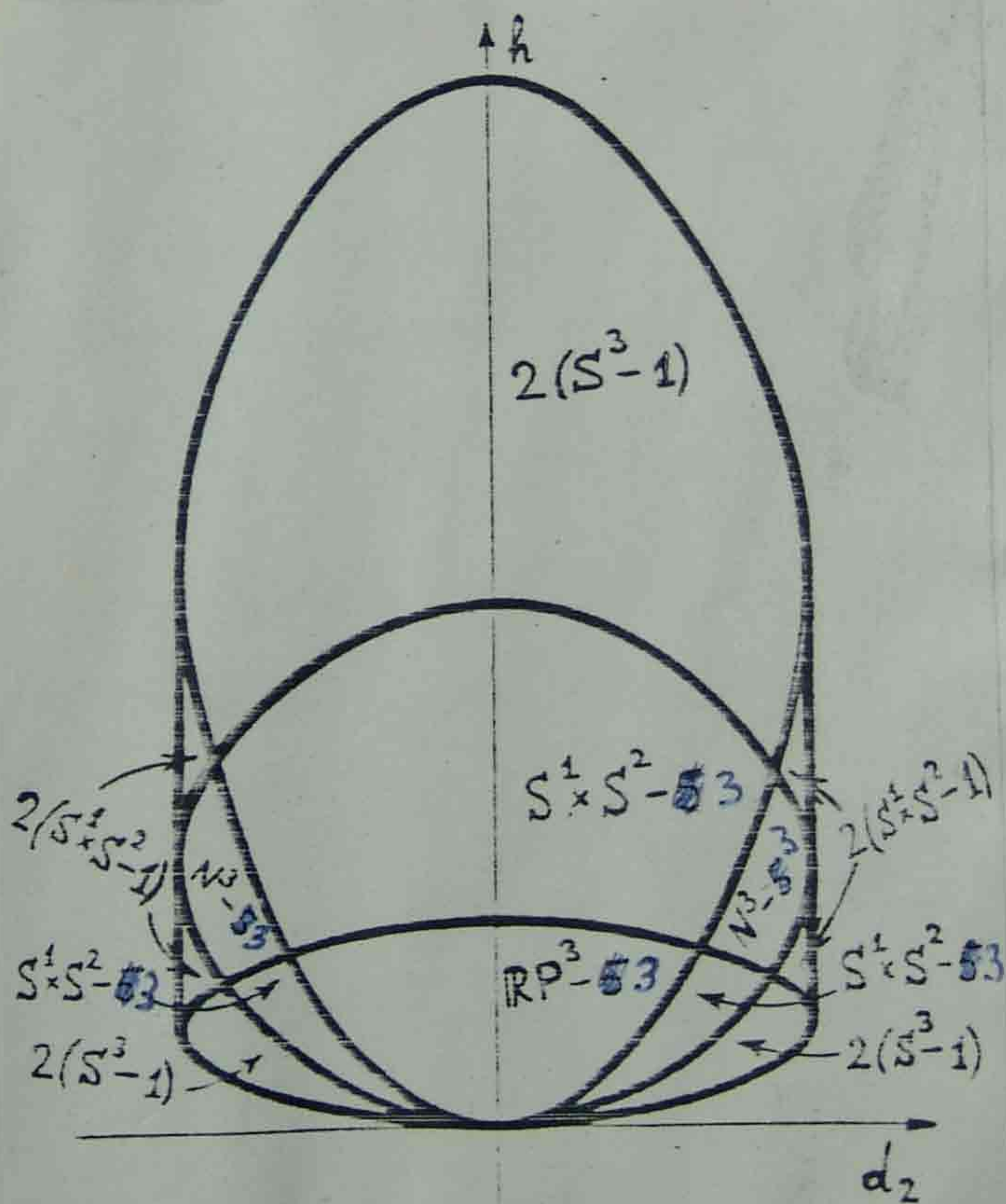


Рис. 34

поменяла
указатели
координат ↑

Она состоит из трех эллипсов и двух вертикальных отрезков $\{2d_2 = \pm d_1, \quad \nu_1 d_1 < 2h < \nu_3 d_1\}$, касающихся всех трех эллипсов (считаем, что $0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3$). Это полный набор разделяющих кривых для данного случая. На Рис. 34 указаны топологический тип и инвариант Фоменко изоэнергетических поверхностей для каждой области на плоскости $\mathbb{R}^2(d_2, h_1)$.

Как будет видно из дальнейшего, гамильтониан H_1 отличается от всех остальных гамильтонианов вида (8.6), (8.7). Исследуем теперь оставшиеся гамильтонианы H_0, H_2, H_3 .

Рассмотрим гамильтониан H_0 . В качестве интеграла K_0 , функционально независимого с H_0 на орбитах (8.5), можно взять

$$K_0 = (\nu_1 + \nu_2)(\nu_1 + \nu_3)p_1^2 + (\nu_2 + \nu_3)(\nu_2 + \nu_1)p_2^2 + (\nu_3 + \nu_1)(\nu_3 + \nu_2)p_3^2. \quad (8.16)$$

Легко проверить, что все гамильтонианы (8.6), (8.7) кроме гамильтониана H_1 представляются в виде линейной комбинации

$$H = \alpha H_0 + \beta K_0 + \gamma f_1 \quad (8.17)$$

где α, β, γ — некоторые коэффициенты. Поэтому бифуркационные диаграммы для произвольного гамильтониана (8.6), (8.7) получаются из бифуркационных диаграмм отображения $H_0 \times K_0: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h_0, k_0)$ при невырожденном линейном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$ (см. §6, §7).

Бифуркационные диаграммы отображения $H_0 \times K_0$ приведены в [39]. Опишем их построение. Будем считать, что коэффициенты гамильтониана H_0 удовлетворяют условию

$$0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3. \quad (8.18)$$

Случай, когда среди ν_i есть отрицательные, сводятся к (8.18) линейной заменой переменных в $\mathbb{R}^6(M, p)$, сохраняющей скобку (8.2).

Орбита (8.5) определяется двумя параметрами d_1 и d_2 . При $2|d_2| < d_1$ она гомеоморфна $S^2 \times S^2$. Критические точки функ-

ции $\tilde{H}_0 = H_0|_{S^2 \times S^2}$ находятся из условия

$$\begin{cases} \text{grad } H_0 = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 \\ f_1(M, p) = d_1 \\ f_2(M, p) = d_2 \end{cases} \quad (8.19)$$

Решениями системы (8.19) являются 12 критических точек:

$$\begin{aligned} &(\pm A, 0, 0, \pm B, 0, 0), (\pm B, 0, 0, \pm A, 0, 0), \\ &(0, \pm A, 0, 0, \pm B, 0), (0, \pm B, 0, 0, \pm A, 0), \\ &(0, 0, \pm A, 0, 0, \pm B), (0, 0, \pm B, 0, 0, \pm A) \in \mathbb{R}^6(M, p), \end{aligned} \quad (8.20)$$

где $2A = \sqrt{d_1 + 2d_2} + \sqrt{d_1 - 2d_2}$, $2B = \sqrt{d_1 + 2d_2} - \sqrt{d_1 - 2d_2}$.

Найдем теперь критические точки функции $\tilde{K}_0 = K_0|_{Q_c^3}$, где $Q_c^3 = \{f_1 = d_1, f_2 = d_2, H_0 = c\}$, и c — не критическое значение для $\tilde{H}_0$. Аналогично случаю Стеклова (см. §7) записываем условие $\text{grad } K_0 = \mu_1 \text{grad } f_1 + \mu_2 \text{grad } f_2 + \mu \text{grad } H_0$ в виде

$$\begin{cases} G_\mu \begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix} = 0 \\ f_1(M, p) = d_1 \\ f_2(M, p) = d_2 \end{cases}, \quad (8.21)$$

где $G_\mu = G_{K_0} - \mu G_{H_0} - \mu_1 G_1 - \mu_2 G_2$ — матрица, являющаяся линейной комбинацией гессианов функций f_1 , f_2 , H_0 , K_0 . Из явного вида G_μ легко определить, что ранг матрицы G_μ может быть равен 3 или 5. В случае, когда ранг равен 5, решениями системы (8.21) будут лишь точки (8.20). Рассмотрим случай, когда ранг матрицы G_μ равен 3. Пусть $d_2 \neq 0$ (случай $d_2 = 0$ будет разобран отдельно). Тогда система (8.21) преобразуется к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = -\mu^2 - \mu(b_1 + b_2 + b_3) \\ \mu_2^2 = 4\mu(\mu + b_1 + b_2)(\mu + b_2 + b_3)(\mu + b_3 + b_1) \\ \mu_2 p_1 = 2\mu(\mu + b_2 + b_3) M_1 \\ \mu_2 p_2 = 2\mu(\mu + b_3 + b_1) M_2 \\ \mu_2 p_3 = 2\mu(\mu + b_1 + b_2) M_3 \\ M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = d_1 \\ M_1 p_1 + M_2 p_2 + M_3 p_3 = d_2 \end{array} \right. \quad (8.22)$$

При решении системы (8.22) возникают три качественно различных случая: (а) $\psi_1 < D < 1$; (б) $\psi_2 < D < \psi_1$; (с) $0 < D < \psi_2$, где $D = 2d_1^{-1}|d_2|$, а ψ_1 и ψ_2 - некоторые константы, зависящие только от параметров гамильтониана b_1 , b_2 , b_3 . Второе уравнение в системе (8.22) определяет на плоскости (μ, μ_2) кривую, изображенную на Рис. 35. Система уравнений (8.22) будет иметь решения тогда и только тогда, когда точка (μ, μ_2) лежит на отрезках кривой, выделенных на Рис. 35 жирными линиями. Случаи (а) , (б) , (с) на Рис. 35 соответствуют различным интервалам изменения величины D , указанным выше.

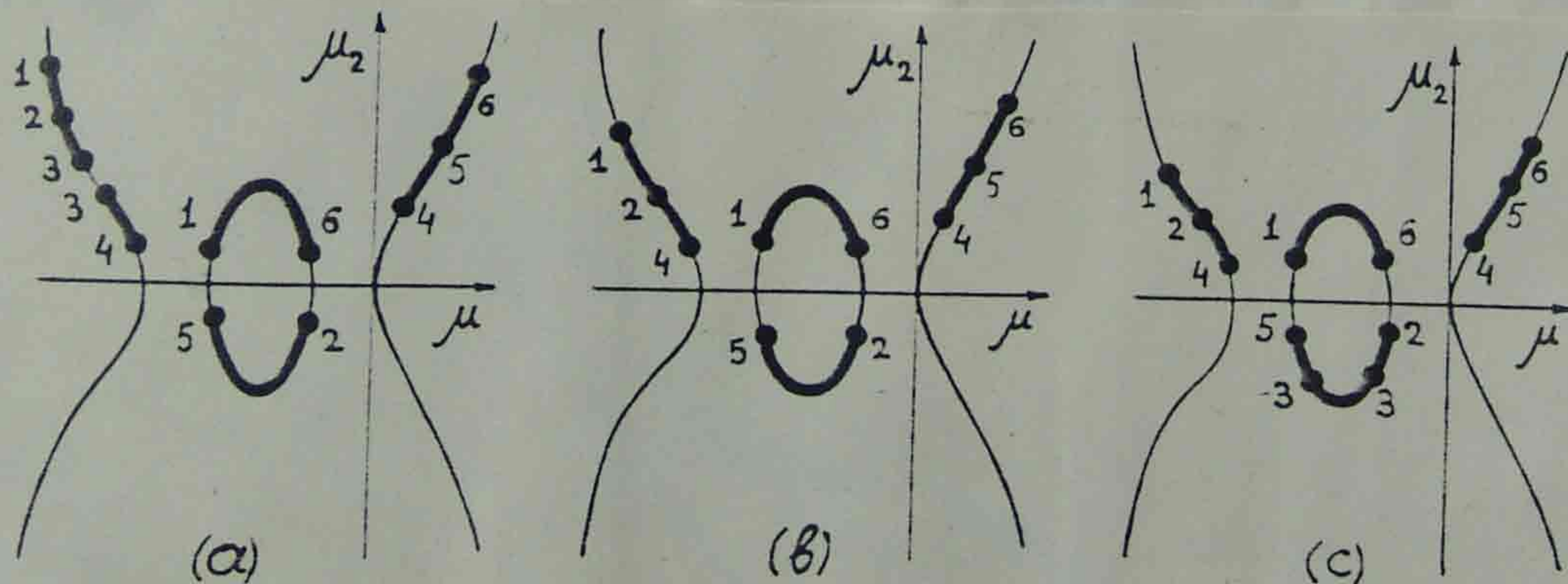


РИС. 35

Если точка (μ, μ_2) лежит на выделенных отрезках кривой и не совпадает ни с одной из жирных точек, отмеченных на Рис. 35

цифрами, то решение системы (8.22) - ровно две окружности в $\mathbb{R}^6(M, p)$. При отображении $H_0 \times K_0$ обе эти окружности отображаются в точку $(h_0(\mu), k_0(\mu)) \in \mathbb{R}^2(h_0, k_0)$, где

$$\begin{aligned} h_0(\mu) &= d_1(2\mu + v_1 + v_2 + v_3) - d_2 \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu}, \\ k_0(\mu) &= d_1\mu^2 + d_2(\mu_2 - \mu \frac{d\mu_2}{d\mu}). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Здесь $\mu_2(\mu)$ есть функция, определяемая вторым уравнением из (8.22). Таким образом, мы получаем отображение (8.23) выделенных отрезков кривой в плоскость $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$. Образ этого отображения и есть бифуркационная диаграмма отображения $H_0 \times K_0 : S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(h_0, k_0)$.

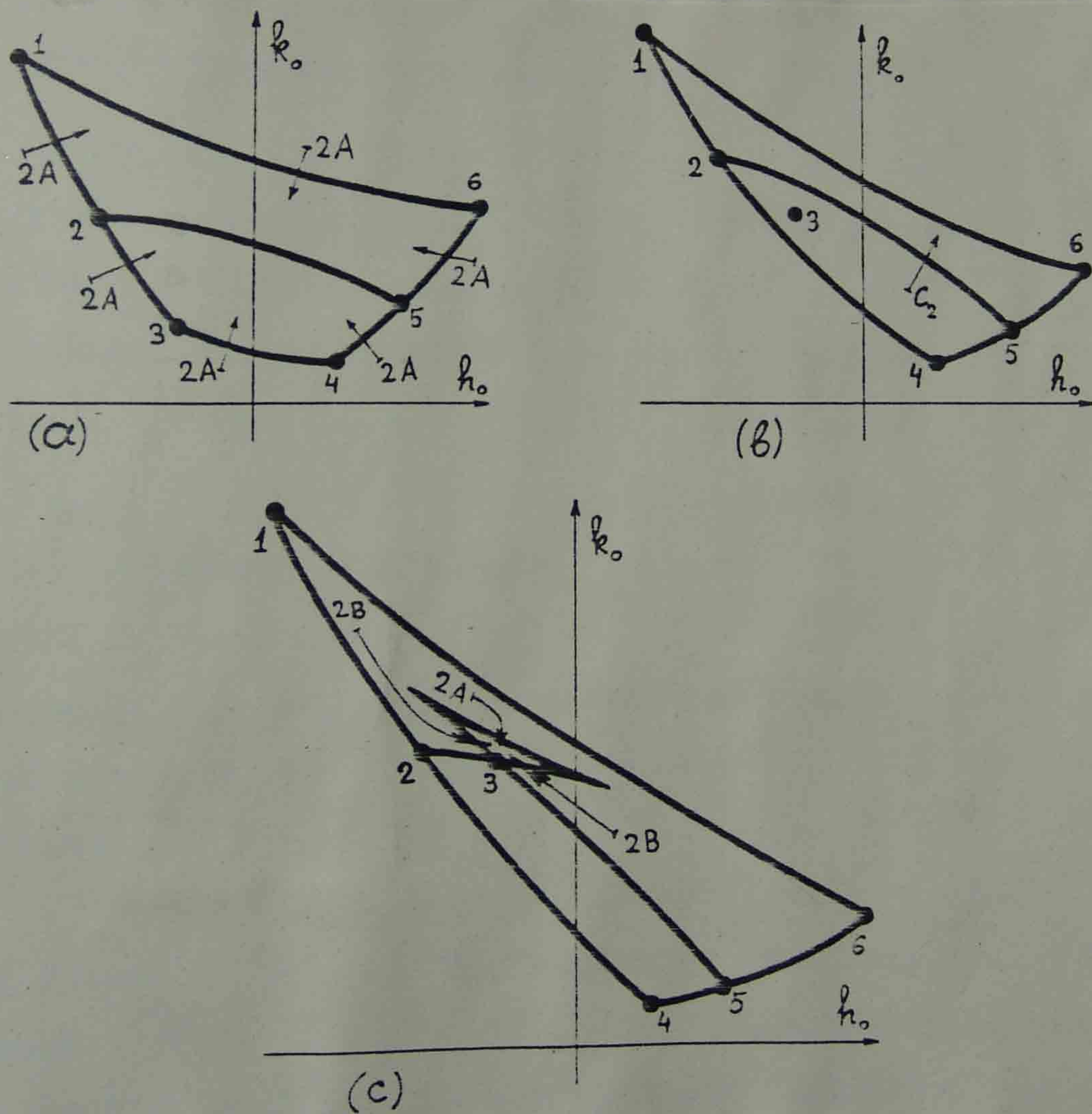


РИС. 36

Бифуркационные диаграммы приведены на Рис. 36 (случай (α), (β), (γ) соответствуют случаям (α), (β), (γ) на Рис. 35). То, что они имеют вид, изображенный на Рис. 36, можно доказать следующим образом. Точки, отмеченные на Рис. 35 цифрами, при отображении (8.23) переходят в точки, отмеченные теми же цифрами на Рис. 36. Эти точки являются образами точек (8.20) при отображении $H_0 \times K_0$. Их координаты на плоскости $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$ равны

$$\left(\pm b_i \sqrt{d_1^2 - 4d_2^2}, (b_i + b_j)(b_i + b_k) \frac{d_1 \mp \sqrt{d_1^2 - 4d_2^2}}{2} \right), \quad (8.24)$$

$$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Таким образом, бифуркационная диаграмма "склеивается" из отрезков кривой, выделенных на Рис. 35. Для функций $h_0(\mu)$ и $k_0(\mu)$, задающих отображение (8.23), выполнено соотношение $\frac{dk_0}{d\mu} = \mu \frac{dh_0}{d\mu}$ (см. Лемму 2 из §1). Отсюда легко определяется выпуклость каждого отрезка бифуркационной диаграммы. Осталось определить, когда бифуркационная кривая имеет точки возврата. Существование у бифуркационной кривой точки возврата при некотором $\mu = \varepsilon$ равносильно выполнению условия $\frac{dh_0}{d\mu}(\varepsilon) = 0$. Используя явное выражение (8.23) для функции $h_0(\mu)$, можно показать, что точки возврата появляются только в случае (γ) и расположены так, как изображено на Рис. 36 (γ).

Аналогично тому, как это делалось для случая Стеклова (§7), определяются индексы критических окружностей и перестройки торков Лиувилля.

Т е о р е м а 8. Для гамильтоновой системы (8.3) с гамильтонианом (8.6), (8.7) бифуркационные диаграммы отображения момента $H \times K: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (при $d_2 \neq 0$) получаются из диаграмм, изображенных на Рис. 36, при невырожденном линейном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$. Дополнительный интеграл боттовский на

всех неособых изоэнергетических поверхностях $Q_h^3 = \{t_1=1, t_2=d_2, h=h\}$, кроме тех, для которых прямая $\alpha h_0 + \beta k_0 = h - \gamma d_1$ проходит через точку возврата бифуркационной кривой (здесь: α, β, γ — это коэффициенты из (8.17)). Перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения $H \times K$ указаны на Рис. 36.

При построении бифуркационной диаграммы отображения $H_0 \times K_0$ мы предполагали, что $d_2 \neq 0$. Разберем теперь случай $d_2 = 0$. Для отображения $H_0 \times K_0: \{t_1=d_1, t_2=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h_0, k_0)$ бифуркационная диаграмма сильно упрощается. Она состоит из 4 отрезков и части параболы, касающейся этих отрезков (см. Рис. 37). Уравнения прямых, на которых лежат отрезки:

$$k_0 = (b_i + b_j)(b_k d_1 - h_0), \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \quad (8.25)$$

Уравнение параболы: $4 d_1 k_0 = (h_0 - d_1(b_1 + b_2 + b_3))^2$. Когда d_2 стремится к нулю, отрезок бифуркационной кривой между точками возврата (см. Рис. 36 (с)) "приближается" к отрезку кривой с концами I, 6 и при $d_2 = 0$ "сливается" с ним.

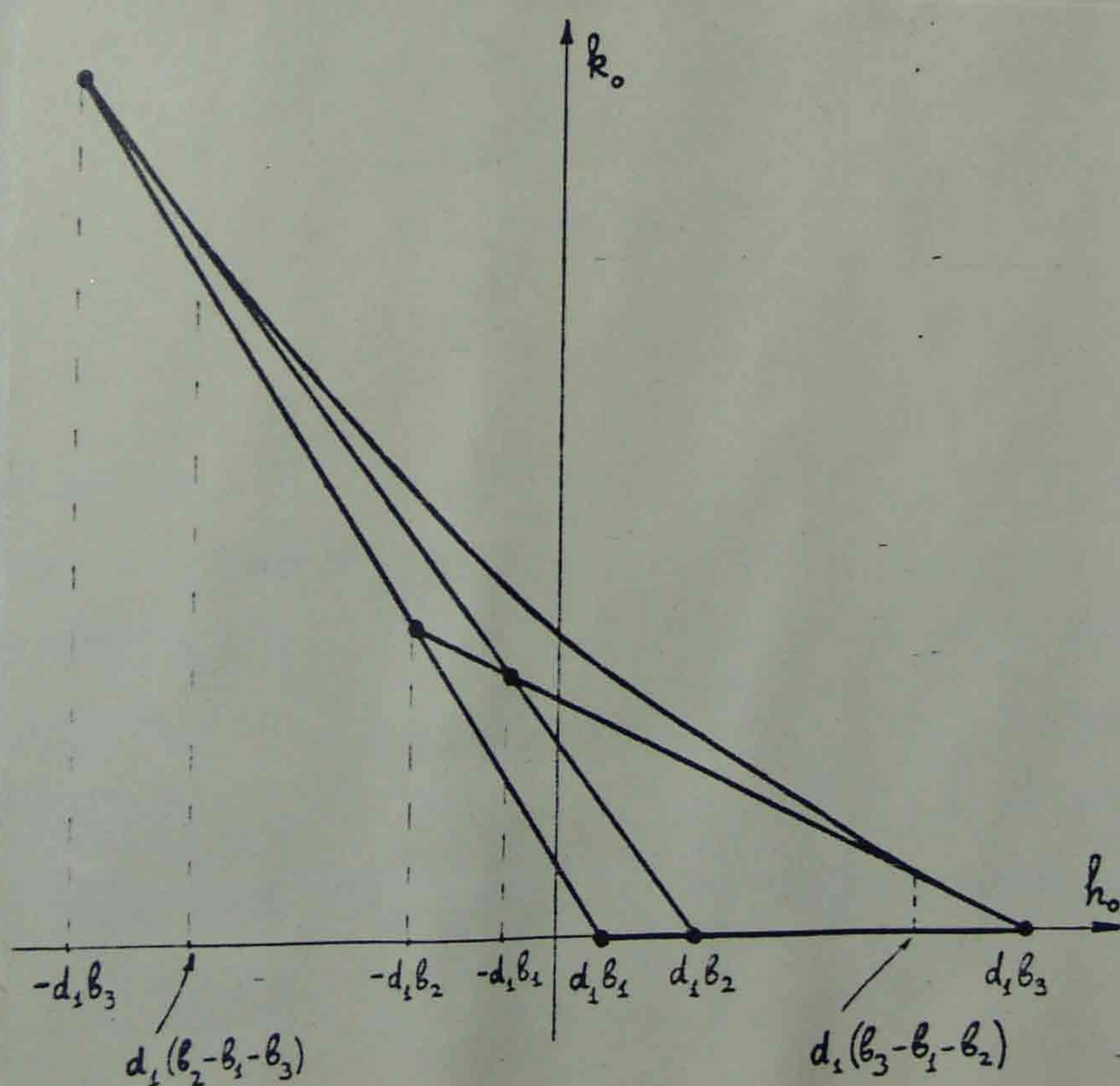


РИС. 37

Построенные бифуркационные диаграммы отображения $H_0 \times K_0$ (Рис. 36, 37) позволяют классифицировать изоэнергетические поверхности любого гамильтониана (8.6), (8.7). Классификация будет проведена в том же виде, что и в §§ 3-7: на плоскости $\mathbb{R}^2(d_2, h)$ строятся разделяющие кривые и в каждой области указывается значение инварианта Фоменко. Все гамильтонианы (8.6), (8.7), как было отмечено выше, являются линейными комбинациями функций H_0 и K_0 (за исключением случая (8.12), который уже разобран). Однако для различных линейных комбинаций разделяющие кривые могут качественно отличаться друг от друга. Исследуем, какие типы гамильтонианов получаются для различных линейных комбинаций функций H_0 и K_0 .

Перенесем прямые, содержащие отрезки бифуркационной диаграммы для $d_2 = 0$ (Рис. 37), в начало координат (см. Рис. 38). Они разбивают плоскость $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$ на области.

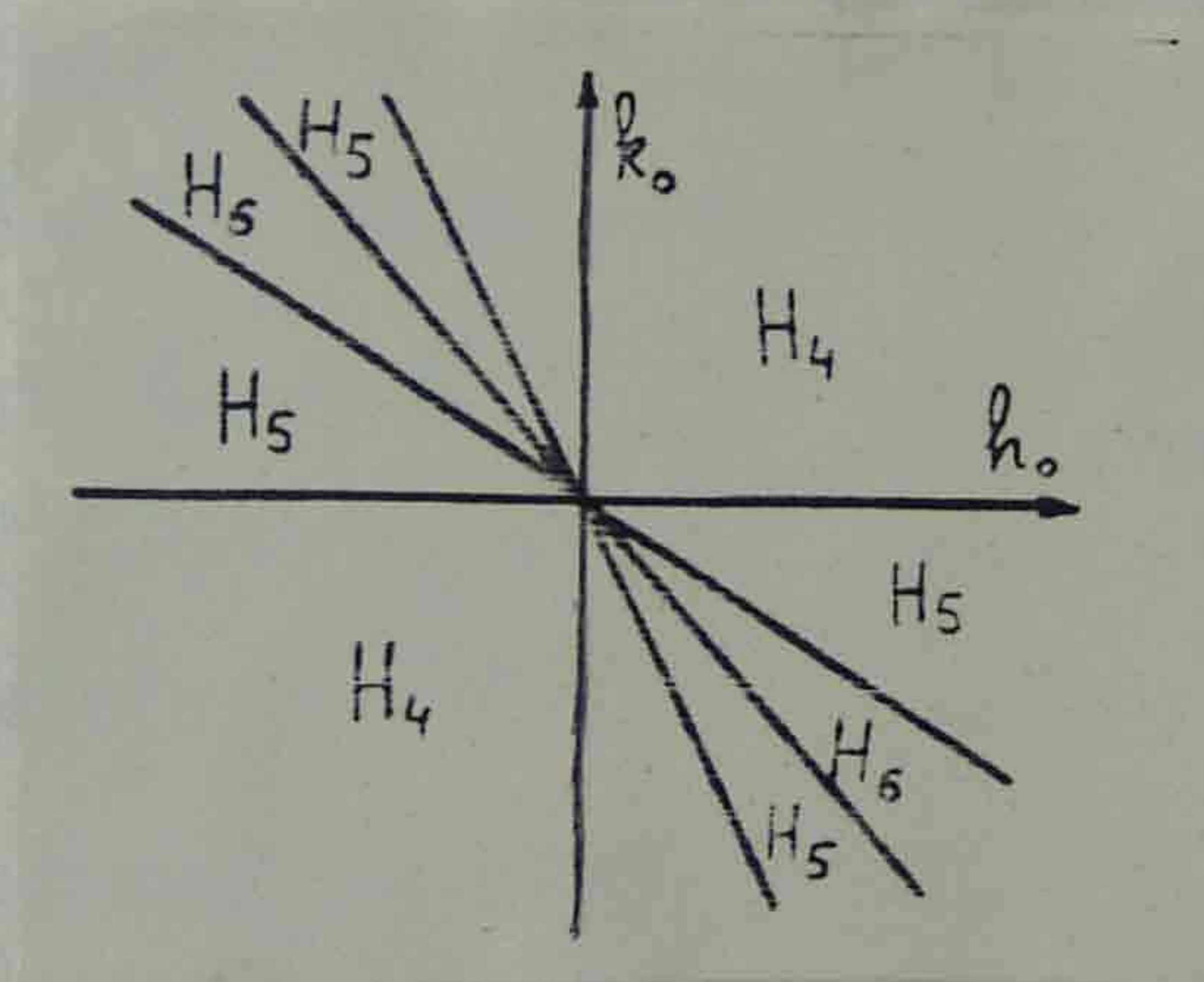


РИС. 38

Оказывается, что тип гамильтониана (8.6), (8.7), представленного в виде линейной комбинации (8.17) функций H_0 , K_0 , f_1 , определяется тем, в какую из областей на Рис. 38 попадает прямая $\alpha h_0 + \beta k_0 = 0$, где коэффициенты α , β берутся из линейной комбинации (8.17). С точностью до знака, каждой из областей на Рис. 38 соответствует один из следующих гамильтонианов:

$$H_4 = \frac{M_1^2}{A_1} + \frac{M_2^2}{A_2} + \frac{M_3^2}{A_3} + A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2 ,$$

$$H_5 = \frac{M_1^2}{A_1} + \frac{M_2^2}{A_2} + \frac{M_3^2}{A_3} - A_1 p_1^2 - A_2 p_2^2 - A_3 p_3^2 , \quad (8.26)$$

$$H_6 = \frac{M_1^2}{A_1} + \frac{M_2^2}{A_2} - \frac{M_3^2}{A_3} + A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 - A_3 p_3^2 ,$$

где $A_1, A_2, A_3 > 0$.

Действительно, если гамильтониан H представлен в виде (8.17), то его можно записать следующим образом:

$$H = \frac{\alpha^2}{\beta} (y_1 M_1^2 + y_2 M_2^2 + y_3 M_3^2 + y_2 y_3 p_1^2 + y_3 y_1 p_2^2 + y_1 y_2 p_3^2) + (\alpha(b_1 + b_2 + b_3) - \frac{\alpha^2}{\beta} + \gamma) f_1 , \quad (8.27)$$

где $y_1 = 1 - \frac{\beta}{\alpha}(b_2 + b_3)$, $y_2 = 1 - \frac{\beta}{\alpha}(b_3 + b_1)$, $y_3 = 1 - \frac{\beta}{\alpha}(b_1 + b_2)$, а b_1, b_2, b_3 — коэффициенты, входящие в H_0 и K_0 . Таким образом, если α и β отличны от нуля, то гамильтониан $H = \alpha H_0 + \beta K_0 + \gamma f_1$ эквивалентен гамильтониану вида H_3 (см. (8.15)).

Пусть y_1, y_2, y_3 не равны нулю. Положим

$$A_1 = \sqrt{\left| \frac{y_2 y_3}{y_1} \right|}, \quad A_2 = \sqrt{\left| \frac{y_3 y_1}{y_2} \right|}, \quad A_3 = \sqrt{\left| \frac{y_1 y_2}{y_3} \right|}. \quad (8.28)$$

Подставив выражения (8.28) в (8.27) и поделив на константу, получаем, что гамильтониан (8.27) эквивалентен следующему:

$$H = \frac{\varepsilon_1 M_1^2}{A_1} + \frac{\varepsilon_2 M_2^2}{A_2} + \frac{\varepsilon_3 M_3^2}{A_3} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 A_1 p_1^2 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 A_2 p_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_3 p_3^2, \quad (8.29)$$

где $\varepsilon_i = \text{sgn } y_i$ ($i = 1, 2, 3$). Гамильтониан (8.29) можно привести к виду (8.26), делая замены координат типа $(M'_1, M'_2, M'_3, p'_1, p'_2, p'_3) = (M_1, p_2, p_3, p_1, M_2, M_3)$, $A'_2 = \frac{1}{A_2}$, $A'_3 = \frac{1}{A_3}$, которые сохраняют скобку (8.2).

Сравнивая выражения (8.27) для y_1, y_2, y_3 с уравнени-

ями прямых (8.25), а также учитывая, что $0 < v_1 < v_2 < v_3$, получаем области, соответствующие гамильтонианам H_4 , H_5 , H_6 , изображенные на Рис. 38. Если в формуле (8.17) $\beta = 0$, то гамильтониан H эквивалентен гамильтониану H_0 . На Рис. 38 ему соответствует вертикальная прямая $h_0 = 0$. Если $\alpha = 0$ или в выражении (8.27) один из y_i равен нулю, то гамильтониан H эквивалентен гамильтониану H_2 (см. (8.13)). Этим гамильтонианам соответствуют 4 прямые, разделяющие области на Рис. 38.

Опишем теперь кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(d_2, h)$, разделяющие области с различным топологическим типом и инвариантом Фоменко для изоэнергетических поверхностей $Q_h^3 = \{t_1 = d_1, t_2 = d_2, H = h\}$, где H — один из гамильтонианов вида H_0, H_2, H_4, H_5, H_6 .

Кривые, разделяющие области с различным топологическим типом изоэнергетических поверхностей — это бифуркационная диаграмма отображения

$$t_2 \times H : S^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(d_2, h), \quad (8.30)$$

где $S^5 = \{t_1 = d_1\} \subset \mathbb{R}^6(M, p)$. Вычисляя, получаем, что для любого из исследуемых гамильтонианов критические точки отображения (8.30) заполняют две двумерные сферы

$$\left\{ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{d_1}{2}, M_1 = \pm p_1, M_2 = \pm p_2, M_3 = \pm p_3 \right\} \subset S^5 \quad (8.31)$$

и три окружности

$$\begin{aligned} & \left\{ M_2 = M_3 = p_2 = p_3 = 0, M_1^2 + p_1^2 = d_1 \right\}, \left\{ M_3 = M_1 = p_3 = p_1 = 0, M_2^2 + p_2^2 = d_1 \right\}, \\ & \left\{ M_1 = M_2 = p_1 = p_2 = 0, M_3^2 + p_3^2 = d_1 \right\} \subset S^5 \subset \mathbb{R}^6(M, p). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Кроме того, для гамильтонианов H_4 и H_6 получаем еще две двумерные сферы

$$\begin{aligned} \{(1+A_1^2)p_1^2 + (1+A_2^2)p_2^2 + (1+A_3^2)p_3^2 = d_1, \quad M_1 = \pm A_1 p_1, \\ M_2 = \pm A_2 p_2, \quad M_3 = \pm \sigma A_3 p_3\} \subset S^5 \subset \mathbb{R}^6(M, P), \end{aligned} \quad (8.33)$$

где $\sigma = 1$ для гамильтониана H_4 , и $\sigma = -1$ для гамильтониана H_6 .

Критические точки (8.32) переходят при отображении (8.30) в три эллипса, для которых прямая $d_2 = 0$ является осью симметрии, а прямые $2d_2 = \pm d_1$ — общими касательными. Двумерные сферы (8.31) (это сингулярные орбиты коприсоединенного представления) отображаются в два отрезка, лежащие на прямых $2d_2 = \pm d_1$. Сферы (8.33) отображаются в другие два отрезка, лежащие на прямых $h = \pm 2d_2$, которые также являются общими касательными к эллипсам. В результате получаем разделяющие кривые, изображенные на Рис. 39. Пунктирная кривая разделяет области с различным инвариантом Фоменко. Ее можно построить, определив координаты точек возврата для бифуркационной диаграммы, изображенной на Рис. 36 (стр. 89). Как и в случае Клебша, пунктирная кривая может пересекать различное число областей. Цифрами в скобках на Рис. 39 указан тип инварианта Фоменко.

Т е о р е м а 9. Любой гамильтониан (8.6), (8.7) эквивалентен одному из гамильтонианов вида $H_0, H_1, H_2, H_4, H_5, H_6$ (см. формулы (8.10), (8.12), (8.13), (8.26)). Разделяющие кривые и значение инварианта Фоменко для этих гамильтонианов приведены на Рис. 34 (для H_1) и на Рис. 39: (а) H_4 ; (б) H_6 ; (с) H_5 ; (д) H_2 , где v_1, v_2, v_3 — одного знака; (е) H_2 , где v_1, v_2, v_3 — разных знаков; (ф) H_0 . Дополнительный интеграл боттовский на всех изоэнергетических поверхностях $Q^3 = \{t_1 = d_1, t_2 = d_2, H = h\}$, для которых точка (d_2, h) не лежит на разделяющей кривой. Список инвариантов Фоменко для всех гамильтонианов вида (8.6), (8.7) состоит из 9 инвариантов типа 1, 2, 5, 9, 12, 13, 14, 15, 16.

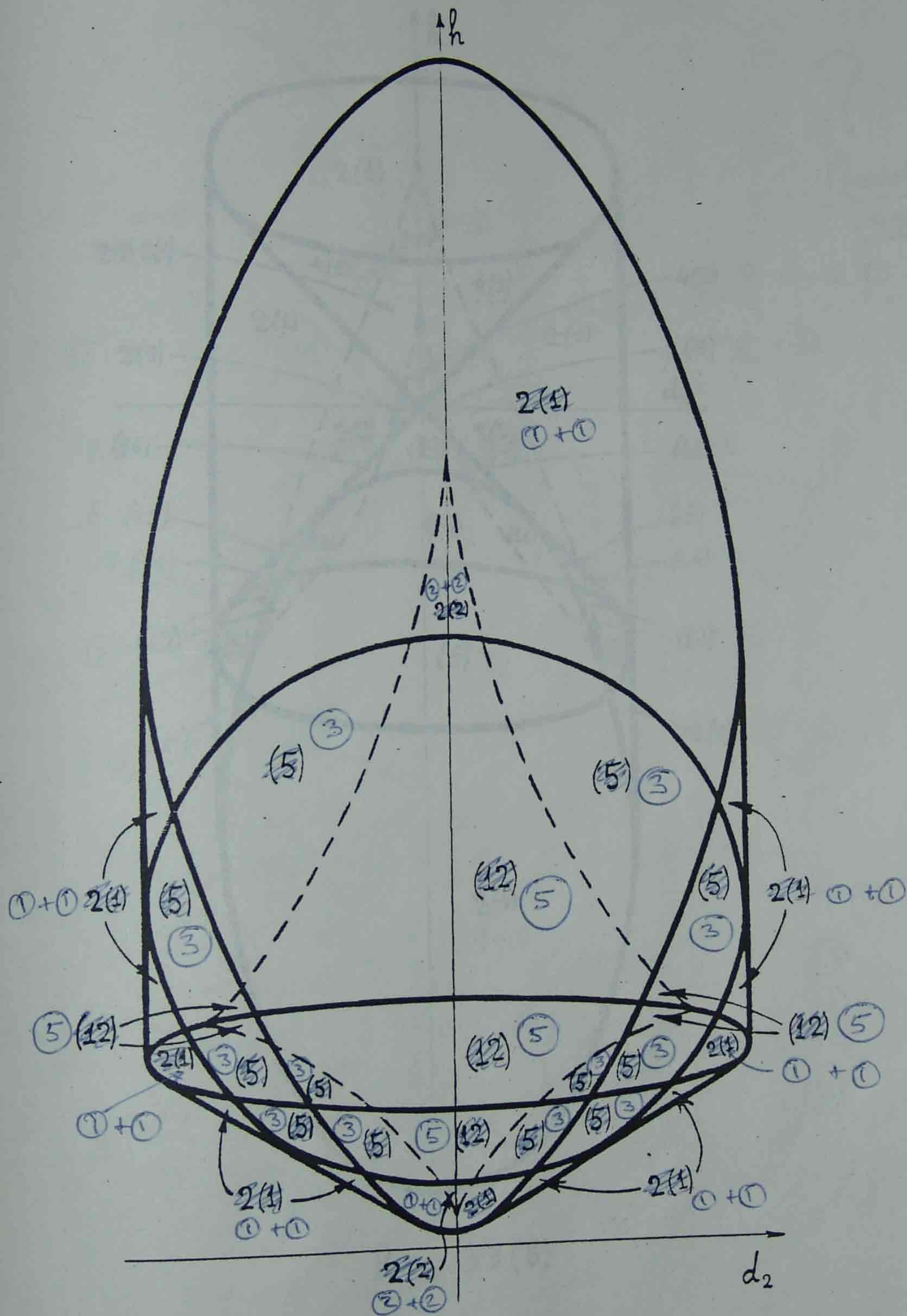
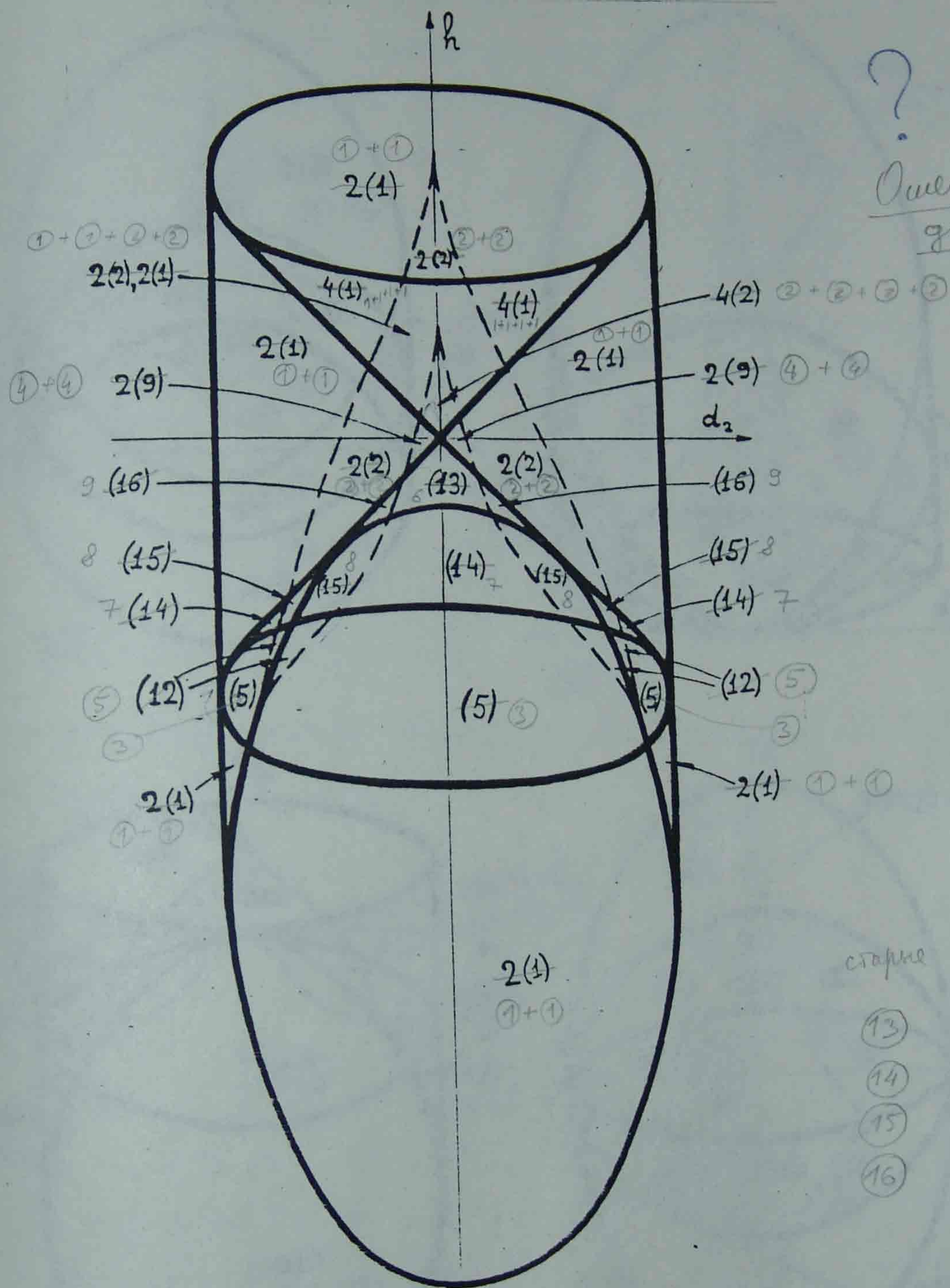


Рис. 39(a)



?

Overlapped
gypsum

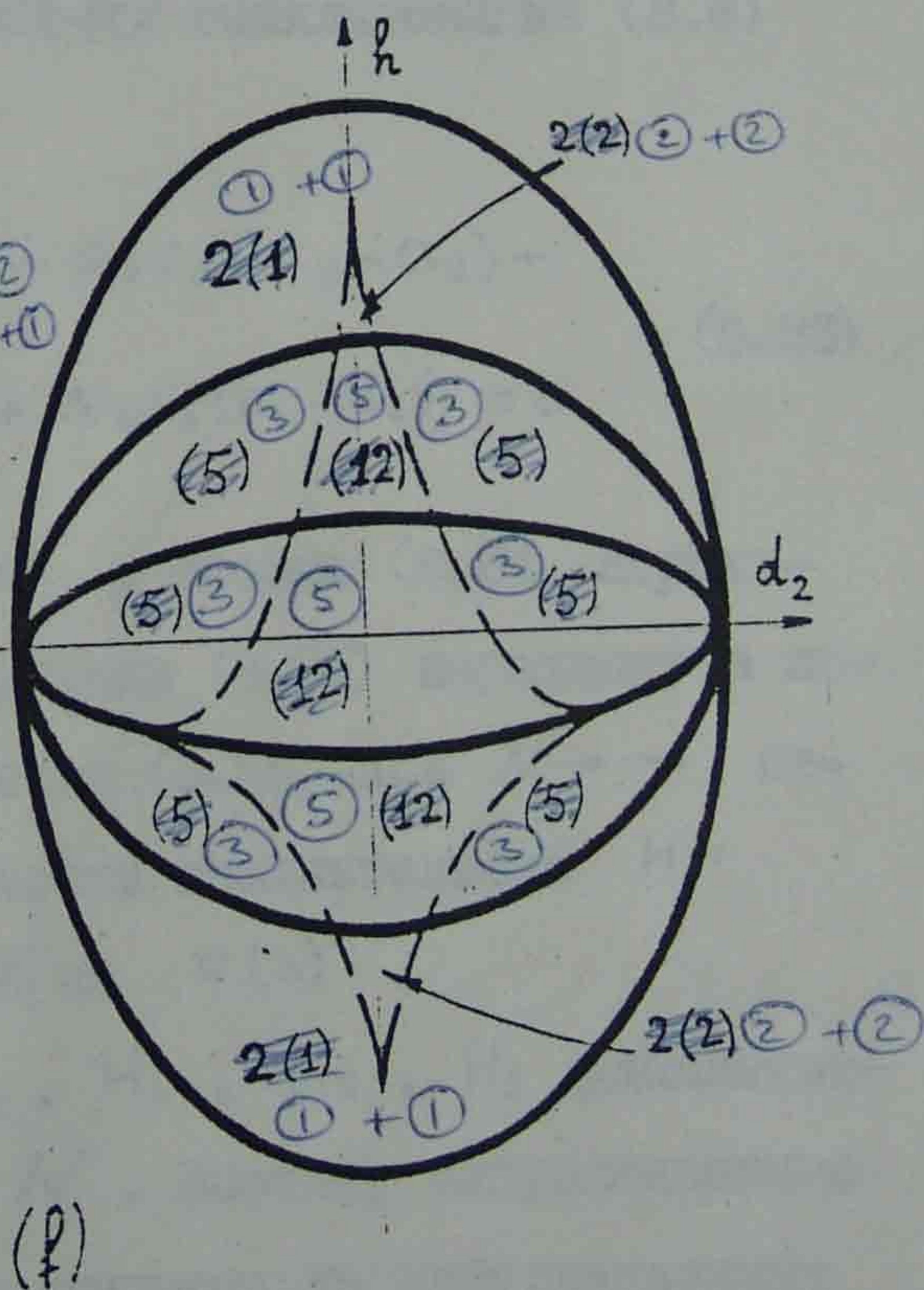
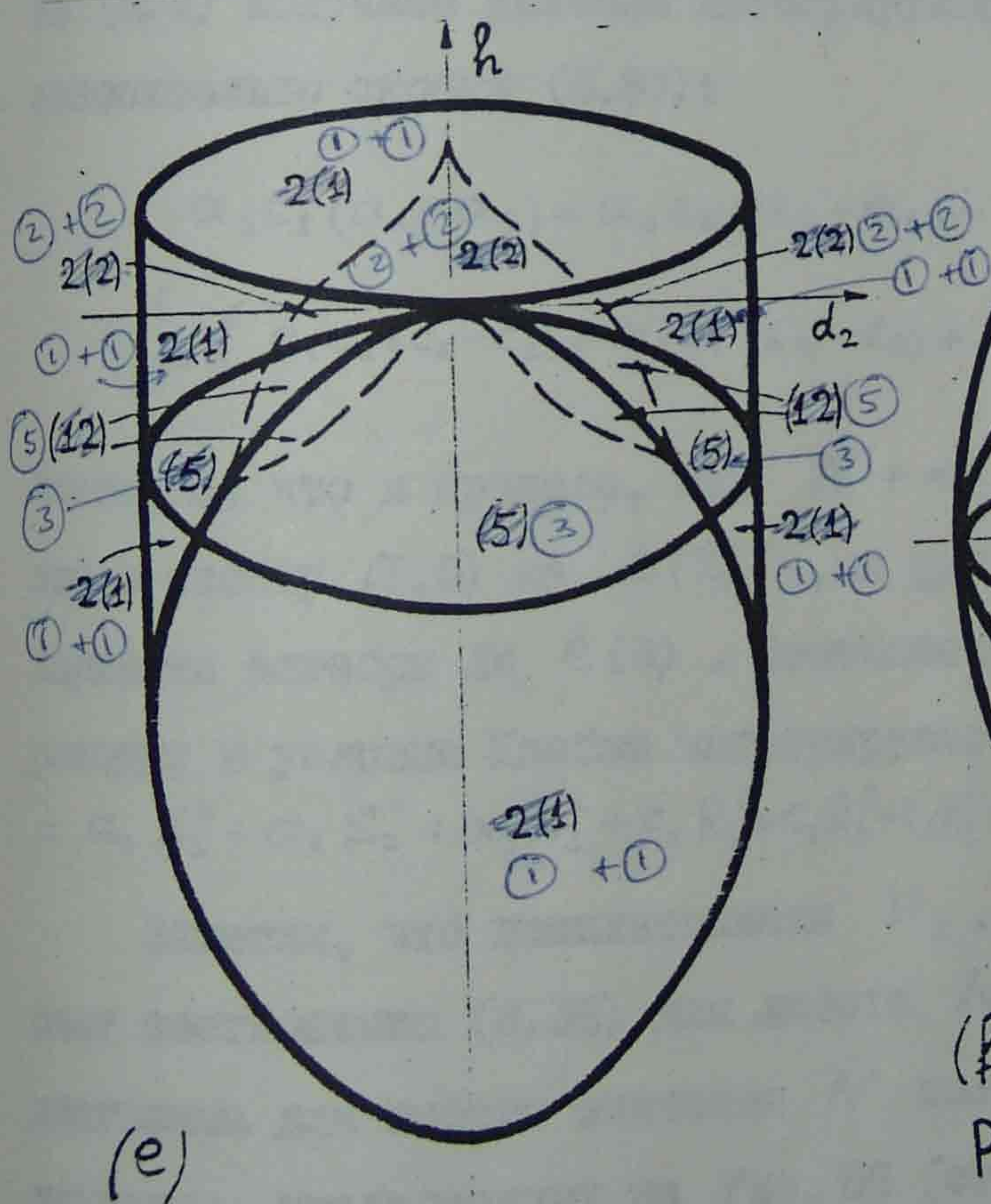
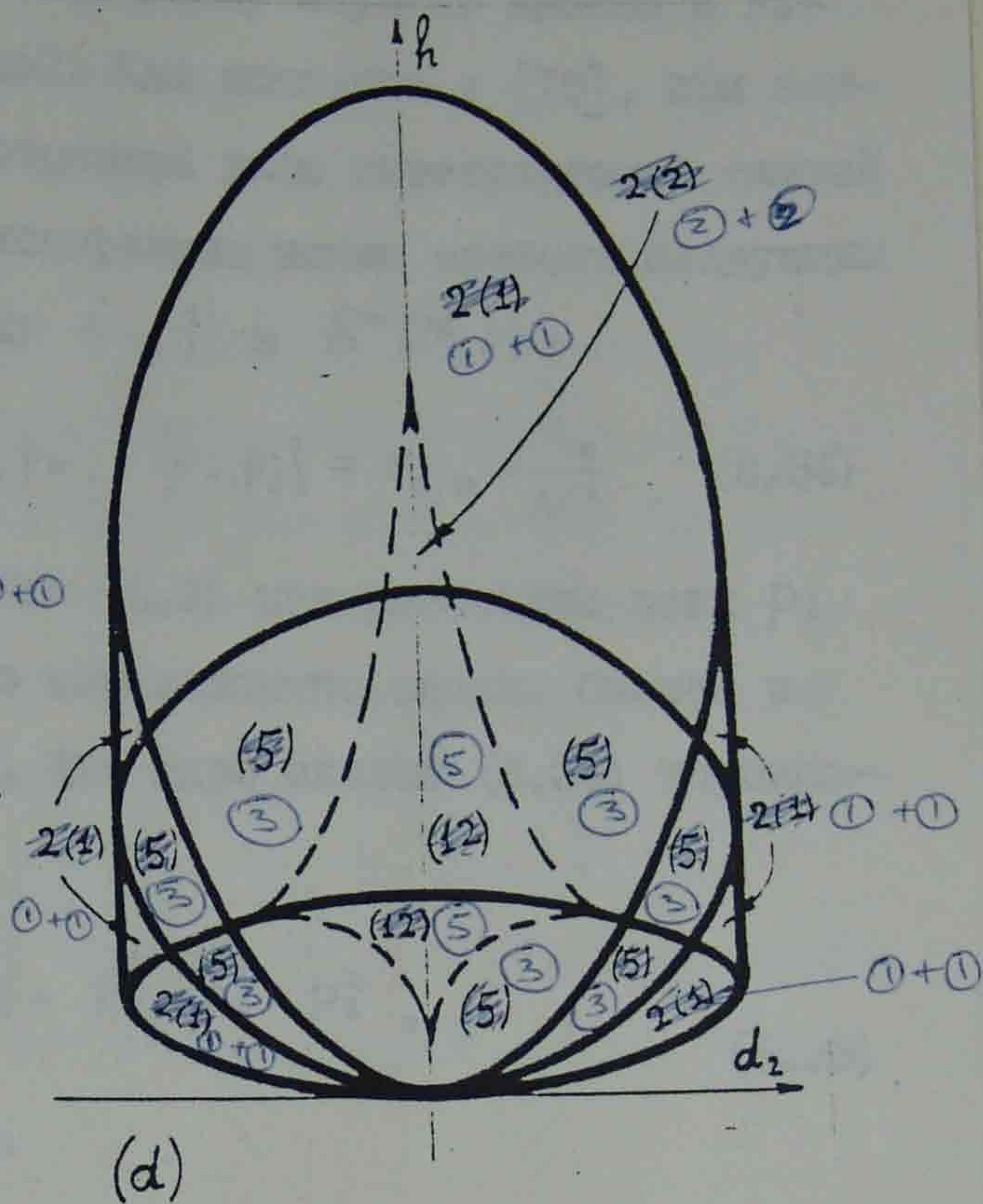
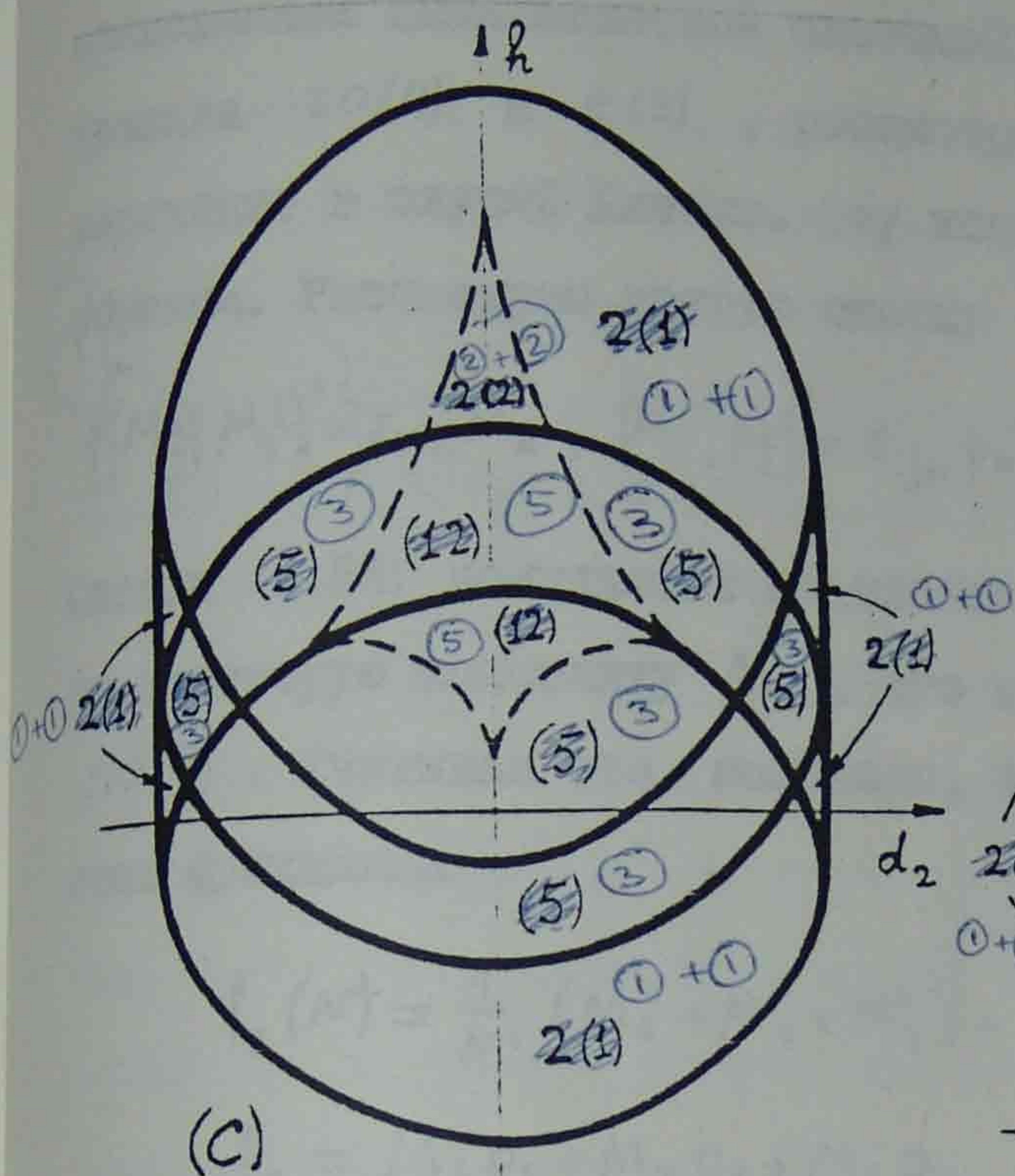


Рис. 39 (c, d, e, f)

Рассмотрим, в заключение, связь между случаем Клебша и исследованной гамильтоновой системой. Как показано в [19], при контракции $so(4)$ к $e(3)$, рассмотренный выше интегрируемый случай переходит в случай Клебша. Эту контракцию можно описать следующим образом. Рассмотрим другую скобку $\{, \}'$ в $\mathbb{R}^6(M, p)$:

$$\{M_i, M_j\}' = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\}' = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} \frac{M_k}{N^2}. \quad (8.34)$$

Скобка (8.34) получается из скобки (8.2) при умножении всех p_i на некоторую константу N , что эквивалентно замене базиса в $so(4)$. Учитывая это, получаем, что ядро скобки (8.34) порождается функциями

$$f_1(N) = \frac{1}{N^2} (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad (8.35)$$

$$f_2 = M_1 p_1 + M_2 p_2 + M_3 p_3.$$

Из (8.7) получаем условие интегрируемости гамильтониана (8.6) относительно скобки (8.34):

$$\begin{aligned} & \alpha_1 c_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2 c_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + \alpha_3 c_3 (\alpha_1 - \alpha_2) + \\ & + \frac{1}{N^2} (\alpha_1 c_1 (c_2 - c_3) + \alpha_2 c_2 (c_3 - c_1) + \alpha_3 c_3 (c_1 - c_2)) = 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Очевидно, что в пределе, при $N \rightarrow \infty$, скобка (8.34) переходит в скобку (1.6) на $e(3)^*$, а функции (8.35) переходят в инварианты алгебры Ли $e(3)$. Соотношение (8.36) при $N \rightarrow \infty$ переходит в условие Клебша интегрируемости гамильтониана $H = \alpha_1 S_1^2 + \alpha_2 S_2^2 + \alpha_3 S_3^2 + c_1 R_1^2 + c_2 R_2^2 + c_3 R_3^2$ на $e(3)^*$.

Заметим, что гамильтонианы H_2, H_4, H_5, H_6 удовлетворяют соотношению (8.36) для любого N . Поэтому бифуркационные диаграммы для любого значения N получаются из бифуркационных диаграмм, изображенных на Рис. 36 (стр. 89), при некотором линейном невырожденном преобразовании плоскости $\mathbb{R}^2(h_0, k_0)$. Это линей-

ное преобразование зависит от N . При $N \rightarrow \infty$ происходит следующее: точки, отмеченные на Рис. 36 цифрами 4, 5, 6, "уходят в бесконечность", и в пределе мы получаем бифуркационные диаграммы для случая Клебша, изображенные на Рис. 22 (стр. 65) [40].

Аналогичная ситуация для разделяющих кривых. Для скобки (8.34) разделяющие кривые также имеют вид, изображенный на Рис. 39, но вертикальные отрезки, касающиеся эллипсов, лежат на прямых $2d_2 = \pm d_1 N$. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ эти отрезки также "уходят в бесконечность", и в пределе получаются разделяющие кривые для случая Клебша (см. Рис. 23 на стр. 66). Случаям (a), (c) на Рис. 39 соответствуют случаи (a), (b) на Рис. 23. Для Рис. 39 (b) нет аналога в случае Клебша, так как при контракции некоторые из изоэнергетических поверхностей этого случая становятся некомпактными.

ПРИЛОЖЕНИЕ: список букв-атомов и слов-молекул.

В приложении перечислены все буквы-атомы и слова-молекулы, возникающие при описании изоэнергетических поверхностей для интегрируемых случаев, исследуемых в данной работе.

Таблица 1 - это просто часть списка букв-атомов из статьи [13], содержащая все буквы-атомы, входящие в слова-молекулы из Таблицы 2. Таблица 2 - это список инвариантов Фоменко, встречающихся в данной работе (в формулировках теорем они обозначались номером из этой таблицы). Для всех букв-атомов (в Таблице 1) указаны: обозначение (из [13]); изображение в виде поверхности F с вложенным графом γ ; граф K_c^* (см. [11-12]). Для всех инвариантов Фоменко (в Таблице 2) указаны: слово-молекула; граф Γ (см. [11-12]; сложность (см. [13]).

Замечание 1. При изображении слова-молекулы необходимо как-то различать ребра, выходящие из одной вершины (буквы-атома), поскольку эти ребра, вообще говоря, неравноправны. Для букв-атомов B и C_2 это сделано следующим образом: противоположные ребра, выходящие из этих букв, соответствуют кольцам одного класса (положительные или отрицательные), на которые распадается поверхность F после выбрасывания из нее графа γ . Эквивалентным образом это можно сформулировать так: в окрестности критической поверхности уровня дополнительного интеграла (описываемой буквой-атомом B или C_2) торами Лиувилля, лежащим на одной поверхности уровня дополнительного интеграла, соответствуют точки на противоположных ребрах (выходящих из B или C_2). Такой способ изображения позволяет различать "топологически одинаковые" слова-молекулы (например, с номерами 4 и 9 из Таблицы 2).

Замечание 2. В Таблицах 1 и 2 приведены графы K_c^* и Γ . Это сделано по следующей причине: слово-молекула не зависит от

выбора дополнительного интеграла $\oint$ (например, не меняется при замене $\oint$ на $-\oint$), а граф Γ показывает, как реально перемещаются торы Лиувилля по изоэнергетической поверхности при возрастании значения интеграла $\oint$ (интеграл $\oint$ можно представлять как "функцию высоты" на графе Γ , в частности, при замене $\oint$ на $-\oint$ граф Γ "переворачивается"). Это можно не учитывать при описании инварианта Фоменко отдельной изоэнергетической поверхности. Но для изоэнергетических поверхностей, зависящих от параметров, правильный вид графа Γ дает дополнительную информацию о том как меняется инвариант Фоменко при изменении этих параметров. На рисунках с разделяющими кривыми инвариант с "перевернутым" графом Γ обозначался тем же номером со штрихом (см., например, Рис. 12, 16, 18).

Т а б л и ц а I.

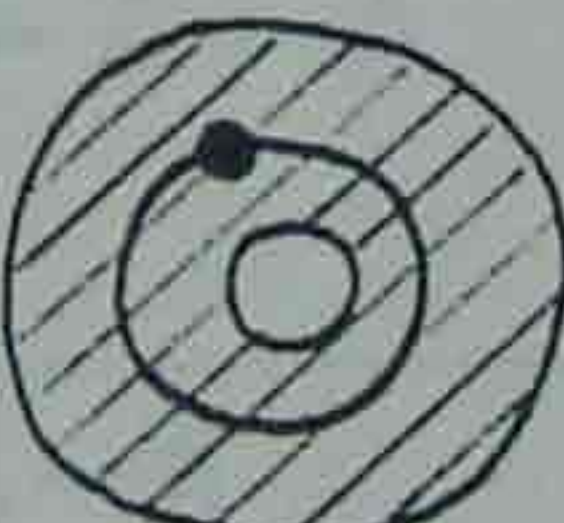
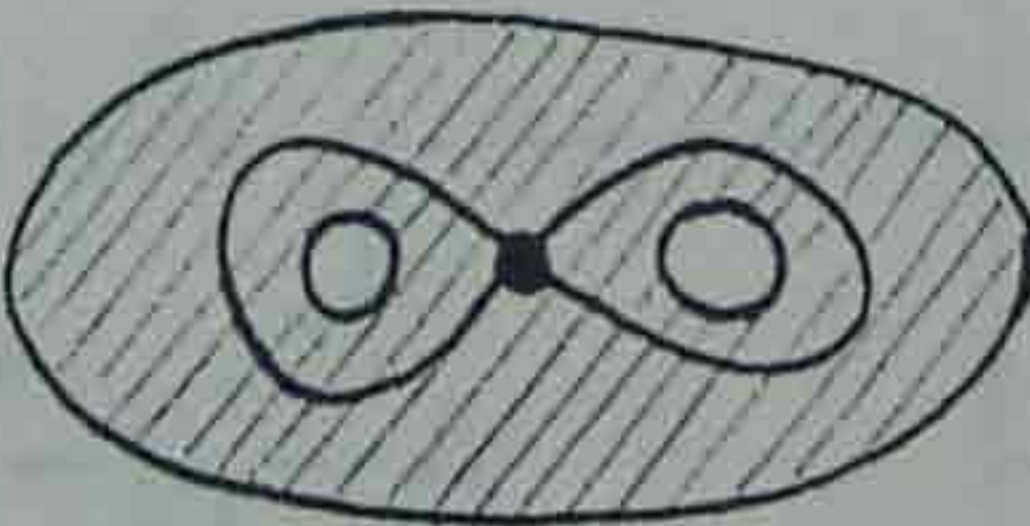
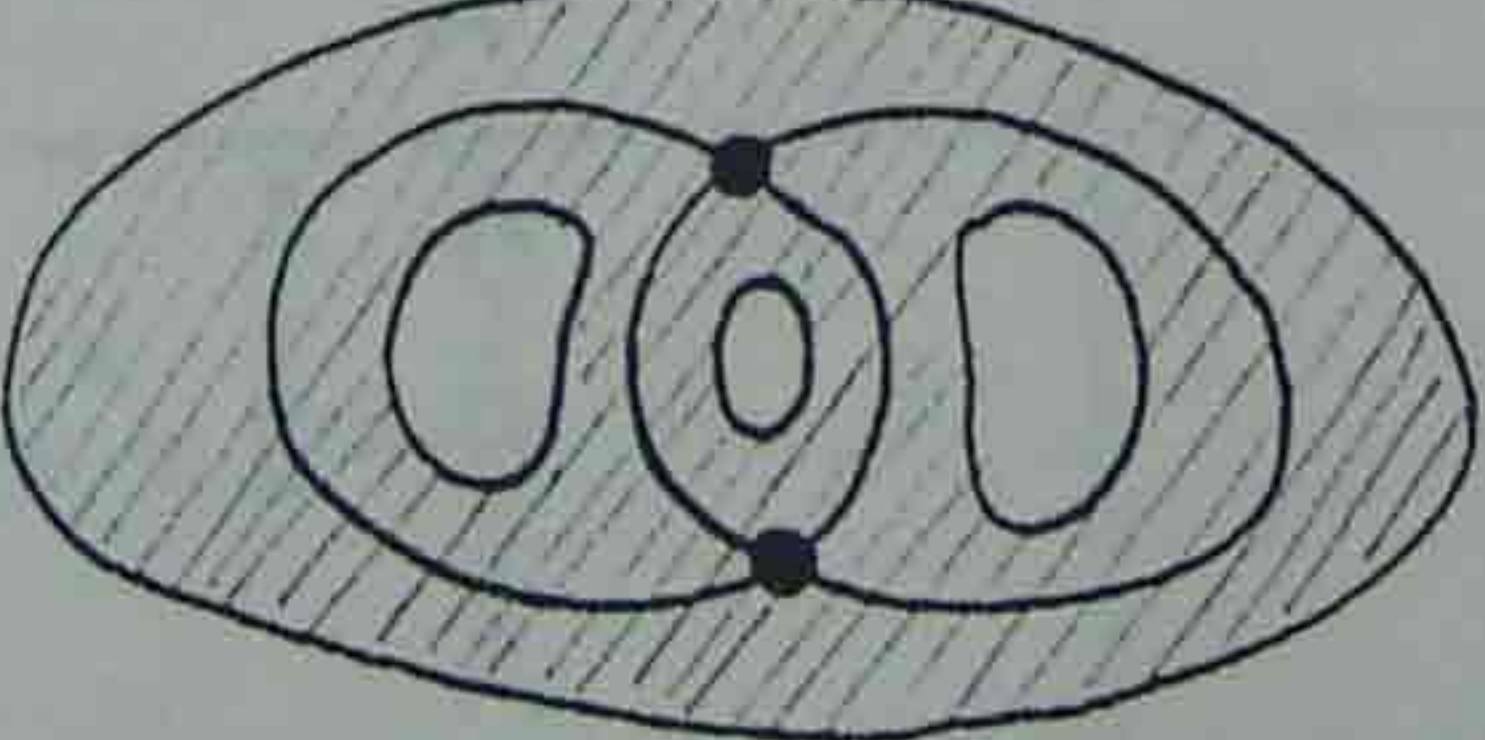
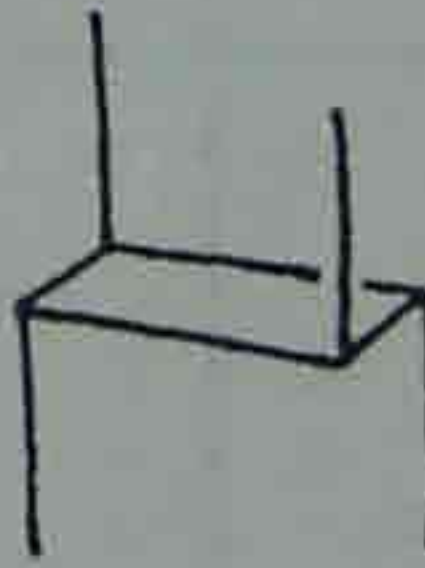
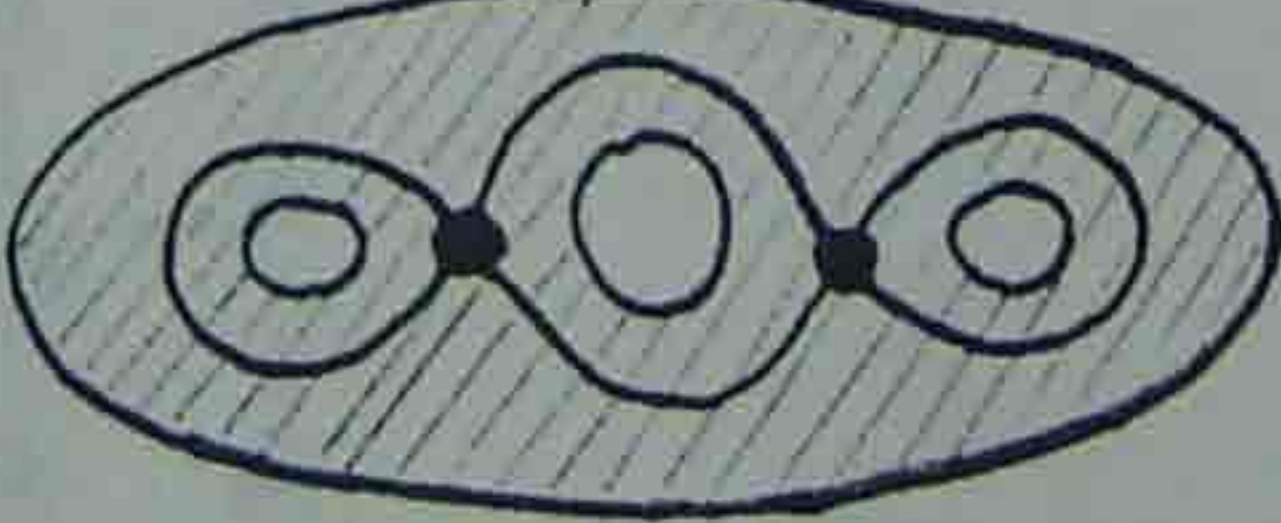
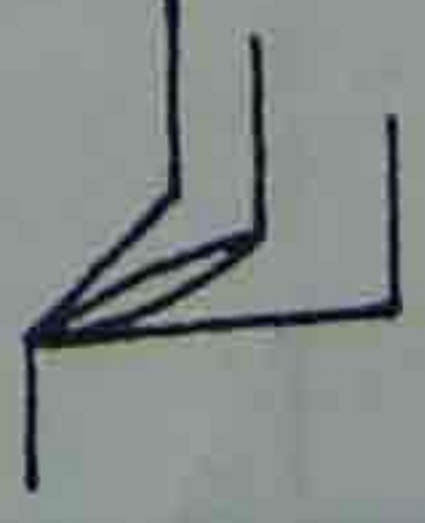
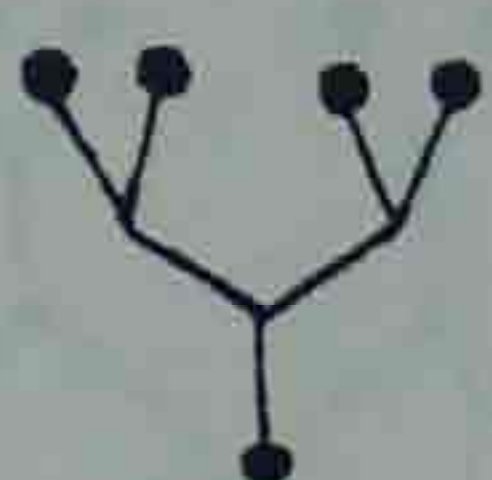
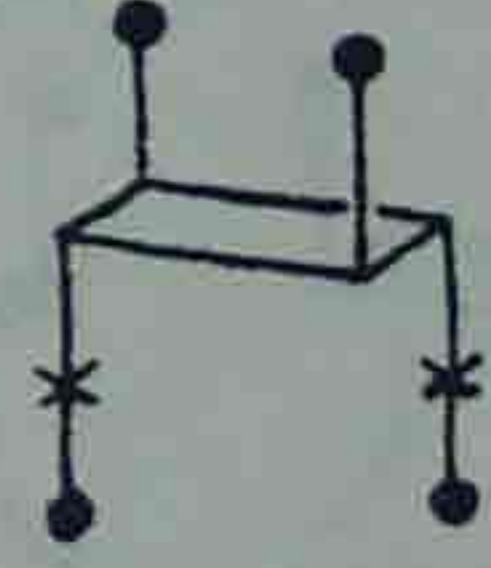
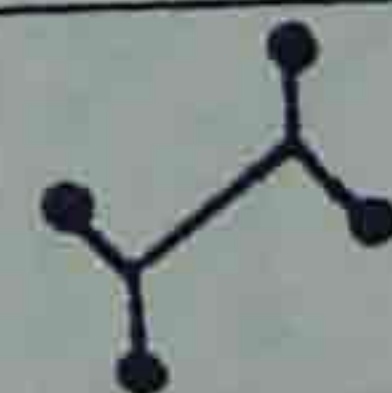
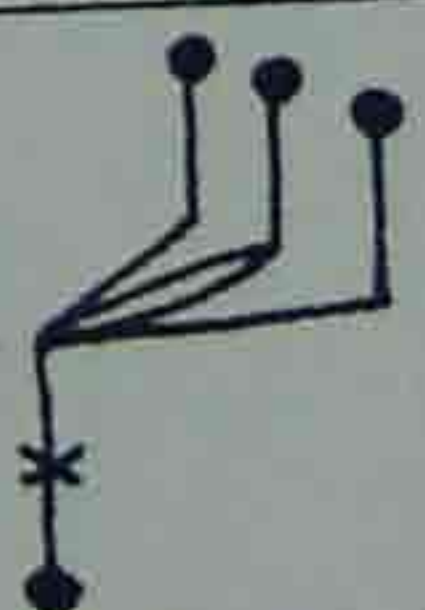
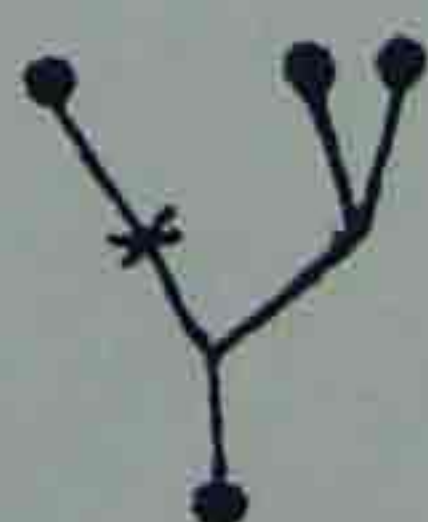
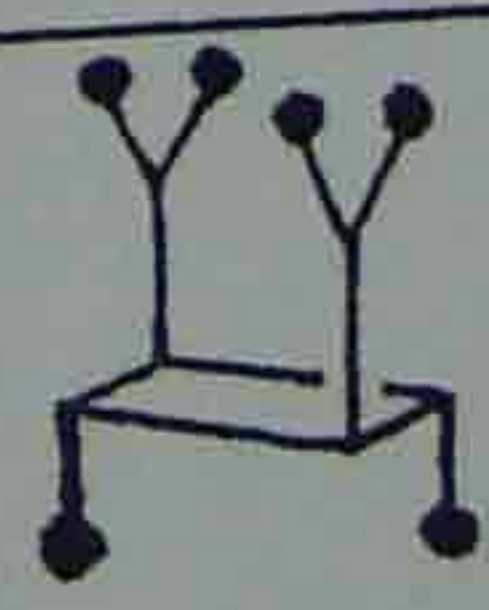
Обозначение буквы-атома	Изображение (F, γ)	Граф K_c^*
A-		
-A*-		
-B- 		
-C ₂ - 		
-D ₁ ≡		

Таблица 2.

№	Слово - молекула	Граф Г	Сложность
1	A-A		(2, 1)
2	$\begin{array}{c} A-B-A \\ \\ A \end{array}$		(4, 3)
3	A-A*-A		(3, 2)
4	$\begin{array}{c} A-B-A \\ \\ A-B-A \end{array}$		(6, 5)
5	$\begin{array}{c} A \\ \\ A-C_2-A \\ \\ A \end{array}$		(6, 4)
6	$\begin{array}{ccc} A & A & A \\ & & \\ B-B-B \\ & & \\ A & & A \end{array}$		(8, 7)
7	$\begin{array}{c} A-A^*-B-A^*-A \\ \\ A \end{array}$		(6, 5)
8	$\begin{array}{c} A \\ \\ A-A^*-C_2-A^*-A \\ \\ A \end{array}$		(8, 6)
9	$\begin{array}{c} A-B-B-A \\ \quad \\ A \quad A \end{array}$		(6, 5)
10	$\begin{array}{c} A \\ \diagup \\ A-A^*-D_1-A \\ \diagdown \\ A \end{array}$		(7, 5)
11	$\begin{array}{c} A \quad A \\ \quad \\ A-A^*-B-B \\ \\ A \end{array}$		(7, 6)
12	$\begin{array}{ccc} A & A & A \\ & & \\ B-C_2-B \\ & & \\ A & A & A \end{array}$		(10, 8)

Т а б л и ц а 2 (продолжение) .

13 6			(8,8)
14 7			(8,6)
15 8			(12,10)
16 9			(12,12)
17			(12,10)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. - Киев: Наукова думка, 1978.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. мат.: Фундам. направления. - 1985 - Т.3 - С. 5-303.
3. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. - М.: Изд-во МГУ, 1980.
4. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук - 1983 - Т.38, №1, С. 3-67.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1989.
6. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
7. Погосян Т.И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела. В кн: Мех. тверд. тела, вып.12. - Киев: Наукова думка, 1980 - С. 9-16.
8. Погосян Т.И. Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай. В кн.: Мех. тверд. тела, вып.15. - Киев: Наукова думка, 1983 - С. 3-23.
9. Погосян Т.И. Критические интегральные поверхности задачи Клебша. В кн.: Мех. тверд. тела, вып.16. - Киев: Наукова думка, 1984 - С. 19-24.
10. Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР - 1986 - Т.287, №5 - С. 1071-1075.
11. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1986 - Т.50, №6 - С. 1276-1307.
12. Фоменко А.Т.

12. Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. - 1988 - Т.22, №4 - С. 38-51.
13. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи мат. наук - 1990 - Т.45, №2 - С. 49-77.
14. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1990 - Т.54, №3 - С. 546-575.
15. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук - 1972 - Т.27, №2 - С. 77-133.
16. Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Успехи мат. наук - 1972 - Т.27, №2 - С. 124-133.
17. Татаринов Я.В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией // Вестн. Моск. ун-та - 1973 - №5 - С. 70-77.
18. Татаринов Я.В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех. - 1974 - №6 - С. 99-105.
19. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук - 1982 - Т.37, №5 - С. 3-49.
20. Илехин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. - Киев: Наукова думка, 1979.
21. Харламова Е.И., Степанова Л.А. Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытках построения новых решений путем замены переменных. В кн.: Мех. тверд. тела., вып.20 - Киев: Наукова думка, 1988 - С. 1-13.

22. Орешкина Л.Н. Изоморфизм двух задач механики // ДАН СССР - 1986 - Т.291, №5 - С. 1080-1082.
23. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. - Харьков, 1893.
24. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР - 1982 - Т.266, №6 - С. 1298-1300.
25. Орешкина Л.Н. О необходимых и достаточных условиях существования четвертого квадратичного интеграла в некоторых задачах динамики твердого тела. В кн.: Мех. тверд. тела., вып.20. - Киев: Наукова думка, 1988, С. 18-29.
26. Фоменко А.Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1991 - Т.55, №4 - С. 747-779.
27. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Мат. заметки. - 1988 - Т.43, №5 - С. 663-671.
28. Богоявленский О.И., Ивах Г.Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В.А.Стеклова // Успехи мат. наук - 1985 - Т. Т.40, №4 - С. 145-146.
29. Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ и его прил. - 1976 - Т.10, №4 - С. 93-94.
30. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1978 - Т.42, №2 - С. 396-415.
31. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. - М.: Изд-во МГУ, 1988.
32. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных

- пространствах и алгебрах Ли. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. мат.: Фундам. направления. - 1987 - Т.16 - С. 227-299.
33. Богоявленский О.И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР - 1983 - Т.272, №6 - С. 1364-1367.
34. Богоявленский О.И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1984 - Т.48, №5 - С. 883-938.
35. Веселов А.П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$. // ДАН СССР - 1983 - Т.270, №6 - С. 1298-1300.
36. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск: изд-во НГУ, 1965.
37. Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1965.
38. Bolsinov A.V. Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang Invariant // Ser.: Advances in Soviet Mathematics, Vol.6 - AMS, Providence, R.I., 1991, p. 147-183.
39. Ошемков А.А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$ // Успехи мат. наук - 1987 - Т.42, №6 - С. 199-200.
40. Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В кн.: Труды семинара по вект. и тенз анализу., вып.23. - М.: Изд-во МГУ, 1988, С. 122 - 132.
41. Oshemkov A.A. Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations // Ser.: Advances in Soviet Mathematics, Vol.6 - AMS, Providence, R.I. - 1991, p. 67-146.